Департамент образования Ярославской области
Всероссийская олимпиада школьников 2015/2016 учебного года

Математика, 11 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

Каждая задача оценивается в 7 баллов в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией по математике.
Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.
Если решения нет, то независимо от продвижения, ставить не более 3 баллов.
Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. **Ответ:** в 13/11 раза.
Решение: Скорость сближения стрелок у исправных часов составляет 1 – 1/12 = 11/12 оборотов в час. А у новых часов: 1 + 1/12 = 13/12 оборотов в час.

2. **Ответ:** овражных на 100 штук.
Решение: Между овражными числами с четными цифрами, не начинающимися с 8, и всеми горбатыми числами с четными цифрами существует взаимно-однозначное соответствие по формуле: $x \leftrightarrow 88888 - x$.
Остается выяснить, сколько овражных чисел начинается с 8.
Третья цифра d (самая маленькая) может быть от 6 до 0.
В каждом случае вторая и последние две цифра – от $d + 2$ до 8.
Выбор каждой из этих цифр независим, поэтому, всего возможностей:
1, при $d = 6$, это число 88688;
$2^3 = 8$, при $d = 4$, это числа 86466, 86468 и т.д.
Цифра справа и две цифры слева от средней – это 6 и 8 в любом сочетании.
3^3 при $d = 2$,
4^3 при $d = 0$.
Всего 1 + 8 + 27 + 64 = 100.

3. Решение:

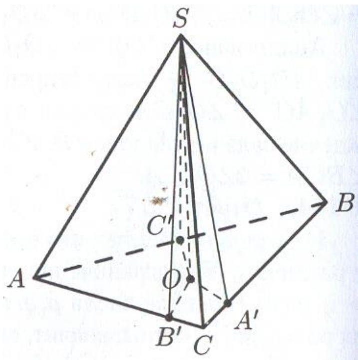
Например, $f(x) = x^2 - x + 1$. В точке (1,1) равенство выполняется.
В других точках график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой $y = x$, а график функции $x = f(x)$ лежит правее этой прямой, т.е. лежат в разных полуплоскостях.

4. <u>Ответ</u>: нет.

Решение: Для решения лучше пользоваться терминологией теории графов (хотя и не обязательно).
Пусть в группах всего $k_1, k_2, \ldots, k_s$ человек (вершин графа).
Тогда, сумма степеней вершин равна $(k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_s^2)$.
Это должно быть четным числом, т.к. равно удвоенному общему количеству ребер (пар друзей).
Каждое ребро в общей сумме считается два раза.
А всего вершин $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = 2015$.
Но сумма чисел и сумма их квадратов имеют одинаковую четность, значит, сумма квадратов на 2 делиться не может.

<u>Указания по проверке:</u>
за ответ без обоснования – 0 баллов.

5. <u>Ответ:</u> 6.



Решение: Из условия следует, что основание O перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды S на основание, лежит внутри треугольника ABC. См. рисунок.
Площадь основания ABC равна сумме площадей треугольников ABO, BCO и CAO. А эти площади, в свою очередь, равны площадям боковых граней, умноженных на косинус угла α. Имеем:
$9 = 5\cos\alpha + 5\cos\alpha + 8\cos\alpha = 18\cos\alpha$.
Отсюда, $\cos\alpha = 1/2$. Т.е. $\alpha = 60°$.
Высоты боковых граней SA', SB' и SC' равны, т.к. все равны $SO\cdot\sin\alpha$.
Пусть они равны h.
$BC\cdot h/2 = 5 \to BC = 10/h$.
Аналогично, $AC = 10/h$ и $AB = 16/h$.
Высота равнобедренного треугольника ABC равна $6/h$ (это катет в треугольнике с гипотенузой AC и вторым катетом – половиной AB).
Отсюда, площадь треугольника ABC равна $48/h^2 = 9 \to h = 4/\sqrt{3}$.
$SO = h\cdot\sin\alpha = 2$, а объем пирамиды $V = 9\cdot 2/3 = 6$.

<u>Указания по проверке:</u>
можно оценивать отдельные продвижения, но без полного решения ставить не более 3 баллов.