Условия и решения задач

5 класс

5.1. Петя бегает в два раза быстрее Коли и в три раза быстрее Маши. На беговой дорожке стадиона Петя, Коля и Маша стартовали одновременно. Петя добежал до финиша на 12 секунд раньше Коли. А на сколько секунд Петя прибежал раньше Маши?

Ответ. На 24 секунды.

Решение. Раз Коля бегает в два раза медленнее Пети, то на прохождение дистанции он тратит вдвое больше времени. Значит, Коля пробежал дистанцию за 24 секунды, а Петя — за 12 секунд. Тогда Маша пробежала дистанцию за $12 \cdot 3 = 36$ секунд и отстала от Пети на $36 - 12 = 24$ секунды.

Комментарий. Просто ответ без объяснений — 3 балла.

В качестве объяснения засчитывать любой текст, показывающий, что ответ не просто угадан.

5.2. Запишите числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 (то есть все числа от 1 до 9, кроме 7) в строку так, чтобы в любой паре соседних чисел одно делилось бы на другое.

Ответ. Например, 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5.

Замечание. Существуют и другие примеры. Однако в каждом верном примере число 5 стоит с краю, а рядом с ним находится число 1.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов.

5.3. Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на 5 квадратов, среди которых по крайней мере четыре имеют разные размеры?

Ответ. Можно.

Решение. Пример показан на рис. 1.

Комментарий. Любой правильный рисунок (даже без объяснений) — 7 баллов.

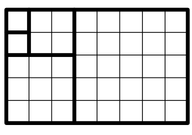

Рис. 1

5.4. За круглым столом сидят 10 человек, некоторые из них — рыцари, а остальные — лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждый из сидящих сказал: «Оба моих соседа — лжецы». Затем один человек ушел из-за стола. Могло ли оказаться, что после этого каждый из оставшихся за столом сказал: «Оба моих соседа — рыцари»? (Ложным считается утверждение, которое хотя бы частично не является верным).

Ответ. Не мог.

Первое решение. Заметим, что изначально за столом сидело хотя бы 2 рыцаря — иначе нашлись бы 3 лжеца, сидящих рядом, и средний из них сказал бы правду, что невозможно. Так как есть рыцарь, сидящий за столом, то за столом сидят хотя бы два лжеца (рыцарь говорит правду). Поэтому, когда из-за стола кто-то ушел, за столом останется хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец.

Предположим, что после этого все сказали «Оба моих соседа — рыцари». Рассмотрим любого рыцаря, оставшегося за столом. Оба его соседа — рыцари; в частности, справа от него сидит рыцарь. Аналогично, справа от этого второго рыцаря сидит еще один рыцарь, и т. д. Получаем, что все люди за столом — рыцари. Но за столом остался лжец. Противоречие.

Второе решение. Рассмотрим любого человека из оставшихся. Если он рыцарь, то оба его соседа рыцари. Тогда он не мог сказать ранее, что оба его соседа лжецы, так как ушел не более, чем один его сосед. Значит, среди оставшихся все лжецы. Рассмотрим того, у кого сосед не уходил, тогда в начале он сказал правду. Противоречие.

Комментарий. Показано, что за столом было хотя бы два рыцаря — 2 балла.

Показано, что за столом было хотя бы два лжеца — 2 балла.

5.5. На уроке физкультуры учитель для эстафет разбивает всех учеников класса на равные группы, а те ученики, из которых нельзя сформировать полную группу, помогают ему судить эстафету. В классе 30 учеников. Первая эстафета была для групп по 4 ученика (соответственно, двое помогали судить), вторая — по 5 учеников (учитель судил один), третья — по 6, и т. д., последняя — по 13. Могло ли оказаться, что каждый ученик участвовал по крайней мере в 9 эстафетах (не в качестве судьи)?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что каждый участвовал по крайней мере в 9 эстафетах (не в качестве судьи). Всего прошло 10 эстафет. Это значит, что в качестве судьи каждый ученик участвовал не более одного раза. Посчитаем, сколько учеников участвовало в каждой эстафете в качестве судей. В первой эстафете (для групп по 4 ученика) в качестве судей участвовало 2 ученика. Во 2-й (по 5) — 0 учеников. В 3-й (по 6) — 0 учеников. В 4-й (по 7) — 2 ученика. В 5-й (по 8) — 6 учеников. В 6-й (по 9) — 3 ученика. В 7-й (по 10) — 0 учеников. В 8-й (по 11) — 8 учеников. В 9-й (по 12) — 6 учеников. В 10-й (по 13) — 4 ученика. То есть всего судейство осуществлялось $2+0+0+2+6+3+0+8+6+4 = 31$ раз. Но всего в классе 30 учеников, и если каждый судил не более одного раза, то количество судейств будет также не больше 30. Противоречие.

Замечание. Можно решить задачу и при помощи подсчета количества участий в эстафетах; это суммарное количество оказывается равным $269 < 9 \cdot 30$.

Комментарий. Переход к рассмотрению не участия в эстафетах, а количества участий в судействе — 2 балла.

Если подсчёт количества участий в эстафетах (или в судействе) осуществлен с ошибкой — не более 3 баллов за задачу.