Всероссийская олимпиада школьников 2015г
Муниципальный этап
Математика
7 класс
Критерии для жюри

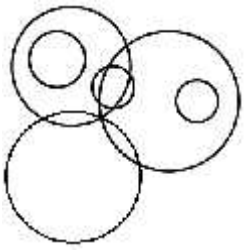
Общее время выполнения работы – 3 часа 30 мин (210 мин).

Общие критерии оценки:

7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1

Лесник считал сосны в лесу. Он обошёл 6 кругов, изображённых на рисунке, и внутри каждого круга насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?



Количество баллов 7

Ответ: не может

Решение

Допустим, что лесник прав. Посмотрим на левый и правый маленькие круги. В каждом из них лесник насчитал по три сосны. Значит, других сосен в больших кругах не должно быть. Но тогда в маленьком центральном круге не должно быть вообще ни одной сосны, что противоречит условию.

Задание 2

В куче 2015 камешков. Двое по очереди забирают их из кучи. За один ход можно взять от одного до десяти камешков. Выигрывает тот, кто заберет последние камешки. У кого из игроков – у начинающего или у его партнера – имеется выигрышная стратегия?

Количество баллов 7

Ответ: у начинающего

Решение

Поскольку за один ход берется от одного до десяти камешков, то любой предыдущий ход всегда можно дополнить до 11 камней, причем это число единственное. И, так как $2015 = 11 \cdot 183 + 2$, то начинающий игрок первым ходом берет 2 камешка, а каждым следующим своим ходом дополняет ход партнера до 11.

***Комментарий**. Верный ответ при неверном обосновании – 1 балл.*

Задание 3

В шеренге стоят 2015 человек, и одного из них зовут Артур. Каждый из стоящих в шеренге либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый, кроме Артура, сказал: "Между мной и Артуром стоят ровно два лжеца". Сколько лжецов в этой шеренге, если известно, что Артур – рыцарь?

Количество баллов 7

Ответ: 2, 3 или 4

Решение

Те, кто стоят рядом с Артуром, и те, кто стоят через одного человека от него, заведомо врут. Поэтому тот, между кем и Артуром стоят ровно два человека, – рыцарь. Перебирая по очереди каждого стоящего за этим рыцарем, (удаляясь от Артура), убеждаемся, что все они – также рыцари. Заметим теперь, что количество людей, стоящих в шеренге рядом с Артуром или через одного человека от него, может быть различным. Их может быть:

1) двое, если Артур – крайний в шеренге;
2) трое, если Артур – второй с краю;
3) четверо во всех остальных случаях.

Задание 4

Является ли число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ простым?

Количество баллов 7

Ответ: нет

Решение

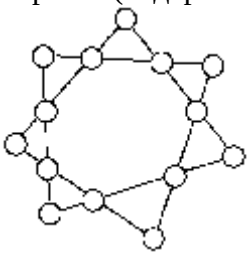
$4^9 + 6^{10} + 3^{20} = (2^9)^2 + 2\cdot 2^9\cdot 3^{10} + (3^{10})^2 = (2^9 + 3^{10})^2$.

Замечание

Можно было бы пытаться вычислять остатки от деления данного числа на разные простые числа, надеясь найти небольшое число на которое наше число делится. Однако из этого ничего не выйдет, так как $2^9 + 3^{10}$ – простое число.

Задание 5

В кружки семиугольной звезды (см. рисунок) в некотором порядке вписаны числа: 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5. Могло ли получиться так, что все суммы чисел вдоль каждого отрезка (содержащего 4 кружка) равны между собой?



Количество баллов 7

Ответ: нет

Решение

Сумма чисел во всех кружках равна $2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 5\cdot 5 = 54$. Поскольку каждый кружок расположен на двух отрезках, сумма всех указанных в условии сумм равна $54\cdot 2 = 108$. Если бы все эти суммы были равны между собой, сумма всех сумм должна была бы делиться на 7, но 108 не делится на 7.