Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2015 – 2016 учебном году
7 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

7.1. *Замените каким-либо способом в примере на сложение десятичных дробей*

$$0,** + 0,** + 0,** + 0,** = 1$$

каждую звёздочку цифрой 2 *или цифрой* 3 *так, чтобы получилось верное равенство.*

Решение: Сумма четырёх цифр в разряде сотых должна быть кратна 10. Так как каждая из цифр либо 2, либо 3, то среди этих цифр ровно две двойки и две тройки. Тогда сумма цифр в разряде десятков должна заканчиваться цифрой 9, поэтому среди цифр десятков три двойки и одна тройка. Ясно, что любая указанная комбинация цифр подходит.

Ответ: Например, $0{,}32 + 0{,}22 + 0{,}23 + 0{,}23 = 1$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
приведён хотя бы один верный пример	7 баллов
при отсутствии верного примера имеются верные заключения об его структуре (например, определён набор последних цифр)	не больше 2 баллов
неверные примеры (в любом количестве)	0 баллов

7.2. *В трёх ящиках лежат орехи. В первом на шесть орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на* 10 *меньше, чем в двух других вместе. Сколько орехов лежит в третьем ящике? Ответ обоснуйте.*

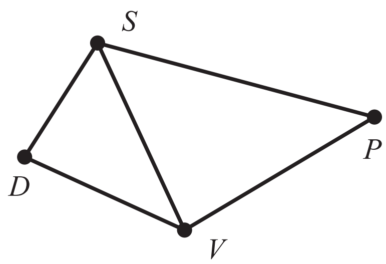
Решение: Пусть в первом ящике лежит x орехов, во втором и третьем — соответственно y и z. Тогда условие задачи определяется равенствами $x + 6 = y + z$ и $x + z = y + 10$. Из первого уравнения $x - y = z - 6$, из второго $x - y = 10 - z$. Значит, $z - 6 = 10 - z$, откуда $z = 8$.

Ответ: 8 орехов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
получен неверный ответ исключительно в силу арифметических ошибок	6 баллов
верно составлена, но не решена система уравнений, описывающая условие задачи	3 балла
приведён конкретный пример (примеры) распределения орехов по ящикам (и, следовательно, верный ответ)	1 балл
приведён только верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

7.3. *Между домами четырёх гномов проложены прямые дороги, причём никакие три дома не расположены на одной прямой. Расстояние между домами Дока и Сони — 5 км, Дока и Ворчуна — 4 км, Сони и Простачка — 10 км, Ворчуна и Простачка — 17 км. Каким может быть расстояние между домами Сони и Ворчуна, если известно, что оно составляет целое число километров? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*



К решению задачи 7.3

Решение: Обозначим дома Дока, Сони, Ворчуна и Простачка буквами D, S, V и P — см. рисунок. Так как никакие три дома не расположены на одной прямой, точки D, S, V и P являются вершинами четырёхугольника (не обязательно выпуклого). Из треугольника DCV по неравенству треугольника имеем $SV < SD + RV = 9$, а из треугольника SVP по тому же неравенству получим $SV + SP > VP$, откуда $SV > 17 - 10 = 7$. Итак, $7 < SV < 9$, учитывая, что SV — число целое, находим, что $SV = 8$.

Ответ: 8 км.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
обоснованно получен верный ответ	7 баллов
обоснованно получена только одна из оценок $SV > 7$ или $SV < 9$ и есть верные ответ и пример	5 баллов
обоснованно получена только одна из оценок $SV > 7$ или $SV < 9$, а примера нет	3 балла
есть верные ответ и пример расположения домов (без обоснования единственности ответа)	2 балла
имеется идея использовать неравенство треугольника	1 балл
ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
рассмотрение выпуклого и/или невыпуклого случаев	баллов не изменяет

7.4. *Трое учеников решали одинаковый тест, состоящий из нескольких задач. За правильный ответ к каждой задаче ученику ставилось два балла, за неправильный снимался один балл, а если ответ на задачу не был написан, то ставилось ноль баллов. Вместе эти трое учеников набрали ровно 100 баллов. Докажите, что кто-то из них при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.*

Решение:

Способ 1. Предположим противное. Тогда если какую-то задачи все трое решили правильно, сумма баллов за неё равна 6, если все трое неправильно — сумма -3, если решили правильно двое — сумма 3, а если один — сумма 0. Все эти числа (6, -3, 3, 0) кратны трём, поэтому сколько бы задач ни было, сумма всех баллов должна быть кратным 3. А 100 на 3 не делится — противоречие.

Способ 2. Пусть в тесте было n задач ($n \in \mathbf{N}$) и i-й ученик решил верно m_i из них ($i = \overline{1,\,3}$). Тогда если бы он записал ответ ко всем задачам теста, то неверных ответов было бы $n - m_i$ и ученик набрал бы $2m_i - (n - m_i) = 3m_i - n$ баллов. Все трое набрали бы тогда $3\left(\sum\limits_{i=1}^{3} m_i - n\right)$ баллов. Уравнение $3\left(\sum\limits_{i=1}^{3} m_i - n\right) = 100$ не имеет решений в целых числах, так как его левая часть кратна трём, а правая — нет. Значит, хотя бы один ученик не дал ответа на все задачи, ч. т. д.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
верное доказательство	7 баллов
задача верно сведена к решению линейного уравнения в целых числах, но не доказана его неразрешимость	5 баллов
при отсутствии доказательства имеется идея рассмотреть делимость суммы баллов на 3	3 балла
рассматривается делимость на другие числа (не на 3), в том числе идеи, связанные с чётностью	0 баллов
рассмотрены только частные примеры (в любом числе)	0 баллов

7.5. *У Миши и Маши в тетрадках было написано одно и то же многозначное целое число, оканчивающееся на* 9876. *Маша поставила плюс между третьей и четвёртой цифрами, считая справа, а Миша — между четвёртой и пятой, также считая справа. К удивлению школьников обе полученные суммы оказались одинаковы. Какое число было записано у школьников первоначально? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.*

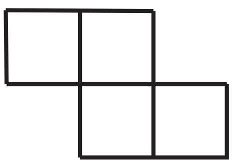
Решение: Пусть записанное число имеет вид $\overline{x9876}$, где x — тоже некоторое натуральное число. Тогда у Миши получилась сумма $x + 9876$, а у Маши — сумма $10x + 9 + 876$. Из равенства $x + 9876 = 10x + 9 + 876$ находим, что $x = 999$.

Ответ: 9999876 и другого числа нет.

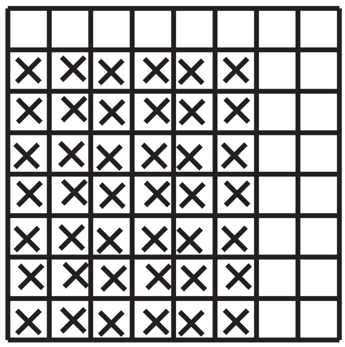
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
приведён верный ответ и доказана его единственность	7 баллов
ответ неверен только ввиду арифметической ошибки	6 баллов
Условие верно записано диофантовым уравнением, но последнее не решено	5 баллов
верно проанализированы случаи n-значных чисел для конкретных натуральных значений n	3 балла
верный ответ, и проверка того, что число 9999876 подходит под условие задачи И/ИЛИ присутствует неудачная попытка записать в общем случае условие задачи уравнением в целых числах	2 балла
верный ответ без обоснования	1 балл

7.6. *Сколькими способами можно расположить на шахматной доске (размер 8×8 клеток) четырёхклеточный многоугольник в виде буквы Z (см. рисунок) так, чтобы он располагался точно по клеткам доски и в пределах доски? Четырёхугольник можно поворачивать и переворачивать. Ответ обоснуйте.*



К условию задачи 7.6



К решению задачи 7.6

Решение: Дополним четырёхугольник двумя клетками до прямоугольника 2×3 и сначала найдём количество способов расположить на шахматной доске такой прямоугольник. Пусть его большая сторона горизонтальна. Тогда левая нижняя клетка прямоугольника может быть любой из клеток, отмеченных на рисунке крестиком — имеем $6 \cdot 7 = 42$ положения. Столько же возможностей расположить прямоугольник так, чтобы его большая сторона была вертикальна. Итого, прямоугольник 2×3 может быть расположен на доске $2 \cdot 42 = 84$ способами. Остаётся заметить, что для каждому расположению прямоугольника на доске соответствует ровно два положения искомого четырёхугольника (из прямоугольника надо убрать пару противоположных угловых клеток, а это делается двумя способами). Значит, четырёхугольник можно разместить $84 \cdot 2 = 168$ способами.

Ответ: 168 способами.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
обоснованно получен верный ответ	7 баллов
не учтено, одно из двух: 1) четырёхугольник можно поворачивать 2) его можно переворачивать; соответственно получен неверный ответ 84. Других ошибок нет.	5 баллов
не учтены оба условия: 1) четырёхугольник можно поворачивать 2) его можно переворачивать; соответственно получен неверный ответ 42. Других ошибок нет.	4 балла
Имеется идея достроить четырёхугольник до прямоугольника, но количество расположений прямоугольника считается неверно	3 балла
верный ответ без обоснования	1 балл
непринципиальные ошибки в подсчёте расположений (например, неверно подсчитано число крестиков в приведённом выше решении)	-1 балл за каждую ошибку
идеи, не ведущие к решению (например, раскраска доски)	не оцениваются