Департамент образования Ярославской области
Всероссийская олимпиада школьников 2015/2016 учебного года

Математика, 8 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

Каждая задача оценивается в 7 баллов *в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией по математике.*
Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.
Если решения нет, то независимо от продвижения, ставить не более 3 баллов.
Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. **Решение:** Угол ALB внешний в треугольнике LBC, значит, он больше внутреннего угла LBC. По условию, углы LBC и LBA равны, значит, в треугольнике ABL угол ALB больше угла ABL. Но против большего угла лежит большая сторона, ч.т.д.

   Комментарий:
   продвинутые школьники могут применить для решения основное свойство биссектрисы треугольника.

2. **Ответ:** овражных.
   Решение: Будем рассматривать только числа, начинающиеся с 5. Между овражными числами, вторая цифра которых отлична от 4 и всеми горбатыми числами существует взаимно-однозначное соответствие по формуле: $x \leftrightarrow 109999 - x$. Овражные числа, начинающиеся с 54 – лишние.

   Указания по проверке:
   школьники могут просто подсчитать количество и тех и других чисел;
   следите за отсутствием ошибок.

3. **Доказательство:** Пусть палочки, лежащие по кругу: a, b, c, d, e, f. (a, c, e – синие).
Для простоты их длины обозначим теми же буквами.
Пусть, для определённости, a – наибольшая синяя палочка, а наибольшая жёлтая лежит рядом с a. Пусть это b.
Имеем, $d + c > b$ (по условию).
Если бы из желтых палочек не складывался треугольник, то было бы $b > d + f$.
В этом случае, $c > f$. Но, $e + f > a$ (по условию), значит и $e + c > a$.
Т.е. из синих палочек складывается треугольник.
Пусть наибольшая желтая палочка лежит не рядом с a. Тогда это d.
Имеем, $b + f > a$ (из условия), но $a \geq d$, следовательно, для желтых палочек b, f, d выполнено неравенство треугольника, ч.т.д.

<u>*Указания по проверке:*</u>
если применено переборное решение, то при отсутствии хотя бы одного случая ставить не более 2 баллов.

4. **Ответ:** Да.
Решение: Первые 11 испытаний помещаем в прибор каждый раз новые монеты.
Если хотя бы раз получаем ответ «2», то цель достигнута.
Если дважды получаем ответ 1, то кладем в прибор одну монету из подозрительной пары и одну настоящую монету (такие к этому моменту выявлены). Это испытание выявит одну фальшивую монету.
Аналогично поступаем со второй подозрительной парой.
Пусть ответ «1» прозвучал однажды. Это значит, что одна фальшивая монета среди каких-то двух испытанных монет (A и B), и одна – среди трёх неиспытанных (C, D, E).
Двенадцатое испытание: помещаем в прибор A и C.
Ответ «2» – все ясно.
Ответ «1». Возможны варианты: фальшивые монеты (A, D), (A, E) или (B, C).
Испытываем A и D. Каждый возможный ответ указывает конкретную пару.
Ответ «0». Фальшивая B и одна из двух – D или E. Это легко установить, положив в прибор D и настоящую монету.
Последний случай: на все 11 испытаний ответы были «ноль». Значит, обе фальшивые монеты среди трёх оставшихся. За два испытания они легко определяются.

<u>*Указания по проверке:*</u>
решение надо читать очень внимательно,
если хотя бы один случай остался без рассмотрения, ставить не более 2 баллов.

5. **Решение:** Вычтем из всех чисел число 11…1 (сто единиц). Рассматриваемые числа превратились в числа, состоящие из нулей и единиц от 0 до 11…1. Покажем, что если у двух из этих чисел есть отличия в последних 10 цифрах, то у них разные остатки от деления на 1024. Если это не так, то рассмотрим разность этих чисел. Она должна делиться на 1024, но оканчивается менее чем на 10 нулей, перед которыми стоит 1 или 9. По признаку делимости на степень двойки такое число на 2^{10} не делится.

<u>*Указания по проверке:*</u>
большинство олимпиадников признак делимости на степень двойки знают:
Число делится на 2^n тогда и только тогда, когда последние n цифр этого числа образуют число, делящееся на 2^n.
Доказывать его просто, но, конечно, не надо.