9.1. Иван хотел купить гвозди. В одном магазине, где 100 г гвоздей стоили 180 рублей, он не смог купить необходимое количество, так как не хватило 1430 рублей. Тогда он пошел в другой магазин, где 100 г стоили 120 рублей. Он купил нужное количество и получил сдачу 490 рублей. Сколько килограммов гвоздей купил Иван?

Ответ: 3,2 кг.

По условию задачи разница в цене составляет 60 рублей за 100 г, или 600 руб. за килограмм, если ее умножить на массу гвоздей в кг, получим 1430+490=1920. Значит, Иван купил 1920:600=3,2 (кг).

9.2. Докажите, что $2^{39}+2^9$ делится на 100.

Преобразуем:

$$2^{39}+2^9=2^9\left(\left(2^{10}\right)^3+1\right)= 2^9\cdot\left(2^{10}+1\right)\left(2^{20}-2^{10}+1\right)=4\cdot 1025\cdot 2^7\cdot\left(2^{20}-2^{10}+1\right)$$

Поскольку 4·1025 делится на 100, исходное число также делится на 100.

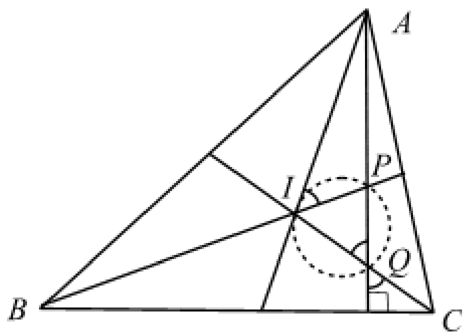
Замечания. Доказана делимость на 4 и на 5, но не доказана делимость на 25 – 2 балла.

9.3. Про коэффициенты a, b, c и d двух квадратных трёхчленов $x^2 + bx + c$ и $x^2 + ax + d$ известно, что $0 < a < b < c < d$. Могут ли эти трёхчлены иметь общий корень?

Ответ: нет, не могут.

Поскольку коэффициенты обоих трёхчленов положительны, то их корни (если они есть) отрицательны. Общий корень x_0 этих трёхчленов является корнем их разности, то есть $x_0(b-a) = d-c$. Из условия следует, что $d-c > 0$ и $b-a > 0$, то есть, $x_0 > 0$. Противоречие.

9.4. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высота из вершины A и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведённой из вершины A.



Обозначим I – точку пересечения биссектрис, P и Q – точки пересечения высоты с биссектрисами углов B и C соответственно, α, β, γ величины углов A, B, C треугольника ABC. С одной стороны, как внешний угол треугольника ABI $\angle AIP=\alpha/2+\beta/2$. С другой стороны, $\angle IQP=\pi/2-\gamma/2=\alpha/2+\beta/2$. Откуда (по теореме об угле между касательной и хордой) и следует утверждение задачи.

9.5. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых трех из них была простым числом?

Ответ: 4 числа. Пример: 1, 3, 7, 9. Действительно, числа 1+3+7=11, 1+3+9=13, 1+7+9=17, 3+7+9=19 являются простыми. Оценка. Заметим, что из пяти натуральных чисел всегда можно выбрать три, сумма которых составное число. Рассмотрим остатки от деления на 3 этих пяти чисел. Если среди остатков есть три одинаковых, то сумма соответствующих им чисел делится на 3. Если же нет трех одинаковых остатков, то каждый из трех возможных остатков 0, 1, 2 должен присутствовать. Тогда сумма трех чисел, имеющих различные остатки от деления на 3, делится на 3. При этом эта сумма не равна 3, так как все числа различные и натуральные. Значит эта сумма составное число.

Замечания. Приведён пример четырёх чисел без оценки – не более чем 3 балла.