Всероссийская олимпиада школьников 2015г
Муниципальный этап
Математика

Всероссийская олимпиада школьников 2015г
Муниципальный этап
Математика
9 класс
Критерии для жюри

Общее время выполнения работы – 3 часа 30 мин (210 мин).

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1
Может ли прямая пересекать все ребра замкнутой 2015-звенной ломаной, не проходя ни через одну её вершину?
Количество баллов 7
Ответ: нет
Решение
Нет, поскольку в каждой полуплоскости, на которые делит прямая плоскость, должно быть одинаковое число вершин.

Задание 2
Доказать, что для любого натурального n одно из чисел $n\cdot(n^2-1)$ или $n\cdot(n^2+1)$ делится на 10.
Количество баллов 7
Решение
Для доказательства утверждения задачи достаточно проверить, что при любом натуральном n одно из чисел n^3-n или n^3+n оканчивается нулем. Для этого непосредственной проверкой убеждаемся, что если число n оканчивается цифрой 0, 1, 4, 5, 6, 9, то и число n^3 оканчивается той же цифрой, и, следовательно, n^3-n делится на 10. Если число n оканчивается на цифры 2, 3, 7, 8, то число n^3 оканчивается соответственно на цифры 8, 7, 3, 2, и, следовательно, число n^3+n делится на 10.
Комментарий*. Отмечено, что оба числа делятся на 2 – 2 балла, рассмотрены не все случаи – плюс 2 балла.*

Задание 3

Может ли в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию треугольника, оказаться в два раза длиннее медианы, проведенной к боковой стороне?

Количество баллов 7

Ответ: нет

Решение

Пусть в треугольнике ABC $AB = BC$, M – середина основания AC, N – середина BC, O – точка пересечения медиан. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой. Следовательно, $BM \perp AC$.

Первое решение. Так как точка O делит каждую из медиан в отношении 2:1 считая от вершины, и треугольник AOM прямоугольный, то $AO > OM$, или $\frac{2}{3}AN > \frac{1}{3}BM$, откуда $2AN > BM$.

Второе решение. Опустим из точки N перпендикуляр на AC и основание этого перпендикуляра обозначим через L. Поскольку NL параллельно BM и N – середина BC, то NL является средней линией в треугольнике BCM, следовательно $NL = \frac{1}{2}BM$. Но из прямоугольного треугольника ANL $AN > NL = \frac{1}{2}BM$. Откуда $BM < 2AN$.

Задание 4

Пусть $x, y > 0$. Через S обозначим наименьшее из чисел x, $1/y$, $y + 1/x$. Какое максимальное значение может принимать величина S?

Количество баллов 7

Ответ: $\sqrt{2}$

Решение

Если $x \le \sqrt{2}$, то и $S \le \sqrt{2}$.

Если $y \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $S \le y \le \sqrt{2}$.

Если $x > \sqrt{2}, \quad y < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $S \le y + \frac{1}{x} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Следовательно, $S \le \sqrt{2}$.

Равенство достигается при условии: $x = \frac{1}{y} = \sqrt{2}$.

Задание 5

Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?

Количество баллов 7

Ответ: 48 фишек

Решение

Оценка. Число фишек на каждой вертикали кратно 3, значит, их не больше 6, а на всей доске – не более 48.

Пример: 32 белые фишки ставим на белые поля, а 16 чёрных - вдоль главной "чёрной" диагонали и вдоль двух параллельных диагоналей "длины" 4. (*Пример получен "учетверением" примера для доски 4×4.*)