9 класс

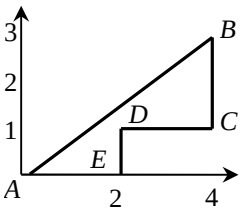
9.1. Сколько имеется пятизначных натуральных чисел, делящихся на 9, у которых последняя цифра больше предпоследней на 2?

Ответ: 800. **Указание**. Предпоследняя цифра (цифра десятков) может быль любой от 0 до 7 (чтобы после прибавления двойки последняя цифра имела смысл). Третья и вторая цифра могут быть любыми (от 0 до 9). После выбора указанных трех цифр (второй, третьей и четвертой) последняя цифра однозначно определена по предпоследней, а первая цифра однозначно определена после этого остальными четырьмя из условия делимости на 9 (заметим, что первой цифрой 0 быть не может, а все остальные цифры 1, 2, ... , 9 дают все возможные остатки при делении на 9). Итого, по правилу произведения имеем 8·10·10 = 800 чисел.

9.2. **а)** Докажите, что если натуральные числа *x*, *y* удовлетворяют уравнению $x^3 + 5y = y^3 + 5x$, то $x = y$. **б)** Существуют ли различные положительные действительные числа *x*, *y*, удовлетворяющие этому уравнению?

Ответ: **б)** существуют. **Указание**. **а)** Имеем $x^3 - y^3 = 5(x - y)$. Если $x \neq y$, то отсюда после деления на $(x - y)$ получим $x^2 + xy + y^2 = 5$. Самые маленькие (и различные) натуральные числа 1 и 2 при подстановке в левую часть дают 7 > 5, значит, и при бóльших значениях левая часть будет больше правой. **б)** Возьмем, например $y = 2x$, и подставим в последнее уравнение: $x^2 + 2x^2 + 4x^2 = 5$. Тогда $x = \sqrt{\frac{5}{7}}$ и $y = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$ удовлетворяют уравнению.

9.3. Можно ли построить на координатной плоскости **а)** квадрат площади 10 с целочисленными координатами вершин? **б)** многоугольник периметра 12 и площади 4 с целочисленными координатами вершин?



Ответ: **а)** можно; **б)** можно. **Указание. а**) Сторона квадрата равна $\sqrt{10}$, поэтому стороны не могут быть параллельны осям координат. Из представления 10= $3^2 + 1^2$ и теоремы Пифагора получается пример квадрата с вершинами *A*(0;0), *B*(-1,3), *C*(2;4), *D*(3,1). Действительно, все стороны четырехугольника *ABCD* при подсчете дают длину $\sqrt{10}$, а угол *BAC* равен $90°$ - это следует из равенства прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1, где B_1, C_1.- проекции на ось *x* точек *B*,.*C* **б**) Пример пятиугольника (см. рис.) следует из теоремы Пифагора, т.к. $3^2 + 4^2 = 5^2$. Площадь *ABCDE* равна $\frac{3 \cdot 4}{2} - 2 = 4$, периметр равен $5 + 2 + 2 + 1 + 2 = 12$.

9.4. Дана окружность с диаметром *AB*, точка *C* – середина одной из полуокружностей с концами *A*, *B*. Из точки *C* проведены два луча под углом 45° друг к другу. Лучи пересекают диаметр *AB* в точках *P*, *Q*. а окружность – в точках *M* и *N* (точки *P*, *M* лежат на одном луче, а *Q*, *N* – на другом; на диаметре точки расположены в таком порядке: *A*, *P*, *Q*, *B*). Докажите соотношение для площадей треугольников: $S_{CPQ} = S_{AMP} + S_{BNQ}$.

Указание. Пусть *O* – центр окружности, *R* – ее радиус. Обозначим $\alpha = \angle AOM$, $\beta = \angle BON$ и $S_1 = S_{AMP}$, $S_2 = S_{BNQ}$, $S = S_{CPQ}$. Поскольку $\angle MON = 2\angle MCN = 90°$, то $\alpha + \beta = 90°$. Рассмотрим ΔAMP и ΔCQP. Они подобны, т.к. $\angle APM = \angle CPQ$ и $\angle AMP = \angle PCQ$ = 45° (по свойству вписанного угла *AMC*). Поэтому площади этих треугольников относятся как квадраты высот к соответствующим сторонам *AP* и *PQ*, т.е. $S_1 / S = (R\sin\alpha)^2 / R^2 = \sin^2\alpha$. Аналогично $S_2 / S = \sin^2$ $= \sin^2(90° - \sim) = \cos^2\sim$. Тогда $(S_1 + S_2) / S = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

9.5. Дан выпуклый 37-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов. Докажите, что среди углов имеются хотя бы три одинаковых.

Указание. См. задачу 8.5.