Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике в 2015-2016 учебном году
9 класс
Время решения – 240 минут (4 часа)

1. Сумма двух натуральных чисел равна 2015. Если в одном из них зачеркнуть последнюю цифру, то получится второе число. Найдите все такие числа.

Решение: Пусть b - меньшее число. Тогда большее число a = 10b+c, где c – зачеркнутая цифра, $0 \le c \le 9$. По условию, 2015=a+b = 11b+c, значит b – неполное частное, а c – остаток от деления 2015 на 11, т.е. b=183, c=2. Искомые числа – 1832 и 183

Критерии. Правильный ответ --- 1балл.
Сказано, что числа устроены как b и 10b+c --- 1 балл.
Этот факт может быть сказан в другом виде. Например, что одно из чисел $\overline{x}$, а второе --- $\overline{\overline{x}}$.
Правильное решение --- 7 баллов.

2. При каком наибольшем *n* по кругу можно расставить *n* различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних?

Решение: n=6. Пусть a и b соседние числа, тогда после b идет число $\frac{b}{a}$, затем $\frac{1}{a}$, дальше $\frac{1}{b}$, за ним $\frac{a}{b}$. Следующим должно идти число a, но оно уже было. Значит больше шести различных чисел при условии их различности расставить невозможно. Пример: 2, 3, $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

Критерии: Ответ без примера --- 0 баллов. Ответ с примером --- 2 балла.
Доказательство, что больше шести чисел расставить невозможно – 4 балла (седьмое число повторяет первое).

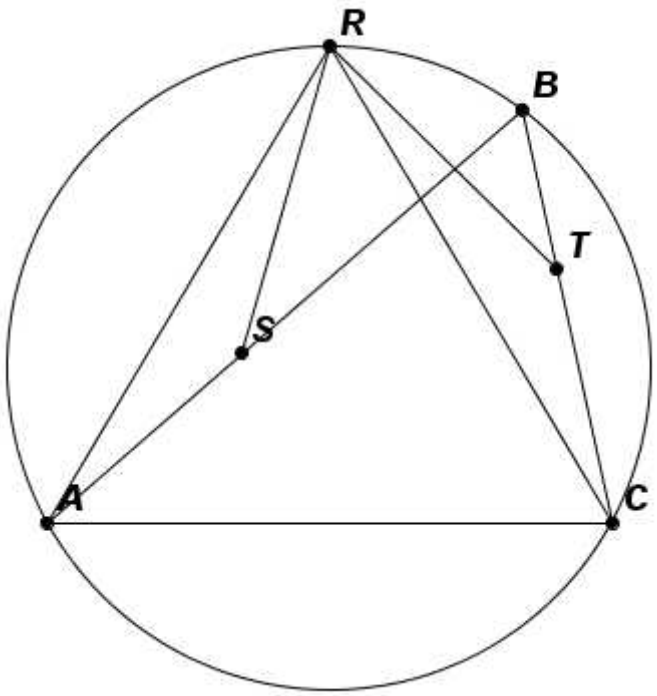
3. Две параллельные прямые пересекают график функции $y = ax^2$. Первая пересекает его в точках с абсциссами x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), вторая – в точках с абсциссами x_3 и x_4 ($x_3 < x_4$). Докажите, что ($x_3 – x_1$) = ($x_2 – x_4$).

Решение: Пусть параллельные прямые имеют уравнения y=kx+b, y=kx+c. Так как первая прямая пересекает график функции $y = ax^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, то x_1 и x_2 - корни уравнение $ax^2 = kx + b$. По теореме Виета сумма корней равна $\frac{k}{a}$, т.е. $x_2 + x_1 = \frac{k}{a}$. Аналогично со второй прямой: x_3 и x_4 – корни уравнения $ax^2 = kx+ c$, и $x_3 + x_4 = \frac{k}{a}$. Получили, что $x_2 + x_1 = x_3 + x_4$, т.е. $x_3 – x_1 = x_2 – x_4$.

Критерии. Выведено, что если прямая $y = k + b$ пересекает график функции $y = ax^2$ в точках с абсциссами t и s, то $t + s = \frac{k}{a}$ --- 3 балла.

4. В треугольнике A A $> B$. На сторонах A и B взяты точки S и T соотвественно, при этом A $= C$. R --- середина дуги A описанной около A окружности. Докажите, что $RS = R$.

Решение: A $= T$ по условию. A $= R$, как хорды стягивающие равные одноимённые дуги. Углы R и R равны, как вписанные и опирающиеся на одну дугу. Значит, треугольники A и C равны по двум сторонам и углу между ними, значит R $= R$.



5. Имеется линейка длиной 10 см без делений. Какое наименьшее число промежуточных делений нужно нанести на линейку, чтобы можно было отложить отрезки длины 1 см, 2 см, 3см, … , 10 см, прикладывая линейку в каждом случае лишь один раз.

Ответ: 4

Решение: Докажем вначале, что трёх делений не хватит. Всего отрезков с концами в пяти точках ровно 10. Значит, если нанести три деления, то каждая из длин от 1 до 10 должна получаться ровно один раз. Если какое-то из делений нанесено на нецелом расстоянии от левого конца, то найдутся отрезки нецелой длины, то есть не все длины от 1 до 10 могут быть получены. Значит, для каждого из делений возможны только девять вариантов. Итак, отрезок длины 9 можно получить лишь одним способом: нанесением деления на расстоянии 1 от одного из концов линейки. Без ограничения общности можно считать, что это деление нанесено на расстоянии 1 от левого конца, обозначим это деление за Т. Как может быть получен отрезок длины 8? Снова учтём тот факт, что отрезков нецелой длины получиться не должно. Это значит, что отрезок длины 8 получается либо нанесением деления на расстоянии 2 от одного из концов, либо из двух делений, каждое из которых нанесено на расстоянии 1 от левого и правого концов линейки. Второй случай невозможен, так как образуются два одинаковых отрезка (длины 1). Если деление наносится на расстоянии 2 от левого края, то снова получаются два отрезка длины 1. Значит, остаётся лишь один вариант: деление наносится на расстоянии 2 от правого края. Обозначим это деление за S. Отрезок длины 3 не может быть получен при помощи концов линейки: получаются лишние отрезки длины 1 или 2. Значит третья точка N такова, что либо NT=3, либо NS=4 (в каждом из вариантов единственность следует из того, что N лежит на линейке). Обозначим левый конец линейки как A, правый --- как B. Если NT=3, то AN=NS=4, получаем противоречие. Если SN=3, то AN=NB=5, снова противоречие с фактом, что длины всех отрезков различны. Итак, мы доказали, что тремя делениями выполнить поставленную задачу нельзя.

Четырёх точек хватит, ибо их можно расположить так: AC=1, AD=4, AE=5, AF=8, где A --- левый конец отрезка.

Критерии:

Только ответ без конструкции --- 0 баллов.

Доказан факт, что все отрезки от 1 до 10 должны получиться ровно один раз --- 2 балла.

Доказано, что трёх точек не хватит --- 6 баллов

Доказано, что четырёх точек хватит --- 1 балл.