9 класс. Решения задач

1. Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из этих трёхчленов так, чтобы сумма трёх выбранных корней равнялась сумме трёх оставшихся.

Решение. *I способ.* Пусть b_1, b_2, b_2 — коэффициенты при x в этих квадратных трёхчленах. Тогда их корни равны $\frac{-b_1+1}{2}$, $\frac{-b_1-1}{2}$, $\frac{-b_2+2}{2}$, $\frac{-b_2-2}{2}$, $\frac{-b_3+3}{2}$, $\frac{-b_3-3}{2}$. Нужно выбрать первый, третий и шестой корни.

II способ. Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена равен квадрату разности его корней. (Это вытекает из явной формулы для корней или из теоремы Виета.) Значит, модули разностей корней этих трёхчленов равны 1, 2 и 3. Пусть a, b — корни первого трёхчлена, c, d — второго, e, f — третьего. Пусть $a > b$, $c > d$, $e > f$, тогда $a = b + 1$, $c = d + 2$, $e = f + 3$, значит, $a + c + f = b + d + e$.

2. При каком наименьшем натуральном n существуют такие натуральные a и b, что

$$\text{НОД}(a, b) = 999 \text{ и } \text{НОК}(a, b) = n!$$

(здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$)?

Ответ. $n = 37$.

Решение. Поскольку НОК(a, b) делится на НОД$(a, b) = 999 = 27 \cdot 37$, а число 37 простое, $n \geqslant 37$. С другой стороны, при $n = 37$ числа $a = 37!$, $b = 999$ годятся.

3. Докажите, что $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 \geqslant 0$ для любых действительных чисел x, y.

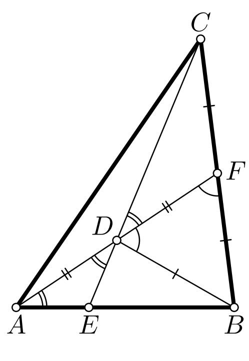
Решение. *I способ.* Выделяя полный квадрат в левой части, получим выражение $5(x+y)^2 - 2xy + 2y - 2x + 2$, то есть $5(x+y)^2 - 2(y-1)(x+1)$. Замена $a = x+1$, $b = y-1$ даёт равносильное неравенство $5(a+b)^2 - 2ab \geqslant 0$, то есть $5a^2 + 8ab + 5b^2 \geqslant 0$. Если $b = 0$, то это очевидно, а иначе, поделив обе части на b^2, приходим к равносильному неравенству $5t^2 + 8t + 5 \geqslant 0$, где $t = b/a$, которое очевидно выполняется для всех вещественных t, так как дискриминант левой части отрицателен.

II способ. Заметим, что левая часть равна

$$(4x^2 + 8xy + 4y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 4(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 \geqslant 0.$$

4. В треугольнике ABC проведена медиана AF. Точка D — середина отрезка AF, E — точка пересечения прямой CD и стороны AB. Известно, что $BD = BF$. Докажите, что $AE = DE$.

Решение. Углы BDF и BFD равны как углы при основании равнобедренного треугольника BDF ($BD = BF$ по условию). Значит, равны и дополняющие их до развёрнутого угла углы BDA и DFC. Поскольку $AD = DF$ и $BD = CF$ по условию, треугольники ABD и DCF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому углы BAD и CDF равны как соответственные углы в этих треугольниках. Наконец, углы ADE и CDF равны как вертикальные. Таким образом, $\angle ADE = \angle DAE$, поэтому треугольник ADE равнобедренный: $AE = DE$.



5. У Вовы в журнале стоит 19 оценок по математике, все двойки и тройки, причём первые четыре оценки — двойки. Оказалось, что среди четвёрок подряд идущих оценок Вовы встречаются все 16 возможных комбинаций из четырёх двоек и троек. Какие у Вовы последние четыре оценки?

Ответ. 3222.

Решение. Заметим, что четвёрок подряд идущих оценок в строке из 19 оценок Вовы ровно 16, то есть каждая встречается ровно по одному разу. После первых четырёх двоек должна идти тройка, иначе комбинация из четырёх двоек будет встречаться дважды. Значит, после комбинации 3222 не может идти ни 2, ни 3, так как в обоих случаях возникает комбинация, которая уже встречалась. Следовательно, комбинация 3222 стоит в конце строки.