Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2015 – 2016 учебном году 9 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

9.1. *На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске? Ответ обосновать.*

Решение: Пусть на доске записаны числа $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Условие задачи равносильно неравенству $a + b + c < d$. Отсюда $a + b < d - c \leqslant 0$, поэтому среди чисел a и b есть отрицательные. Тогда числа c и d тоже отрицательны, значит, отрицательных не меньше трёх. Набор чисел $a = 1$, $b = -2$, $c = d = -3$ показывает, что возможна ситуация, когда отрицательных чисел ровно 3.

Ответ: 3 числа.
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Наличие верного примера и доказательства его оптимальности	7 баллов
Имеется доказательство, что отрицательных чисел не меньше трёх (при отсутствии примера с тремя числами)	3 балла
Приведён пример набора с тремя отрицательными числами (при отсутствии доказательства его оптимальности)	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
Примеры наборов с четырьмя отрицательными числами	не оцениваются

9.2. *Приведённый квадратный трёхчлен $y = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если прибавить к коэффициенту a любой из этих корней, а из коэффициента b вычесть квадрат этого же корня, то полученный трёхчлен также будет иметь по крайней мере один корень.*

Решение:

Способ 1. Пусть корни исходного квадратного трёхчлена p и s. По теореме Виета $a = -p - s$, $b = ps$. Пусть мы добавили к коэффициенту a число p, а из коэффициента b число p^2 вычли. Тогда получился трёхчлен

$$x^2 + (a + p)x + b - p^2 = x^2 - sx + ps - p^2.$$

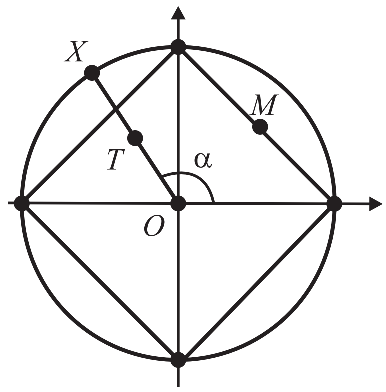
Его дискриминант равен $D = s^2 - 4(ps - p^2) = (s - 2p)^2 \geqslant 0$. Значит, полученный многочлен имеет хотя бы один действительный корень.

Способ 2. Пусть t — корень исходного трёхчлена. Тогда $t^2 + at + b = 0$. Преобразуем левую часть: $t^2 + at + b = t^2 + at + t^2 - t^2 + b = t^2 + (a + t)t + (b - t^2)$. Полученное равенство $t^2+(a+t)t+(b-t^2)=0$ показывает, что трёхчлен $x^2+(a+t)x+b-t^2$ имеет своим корнем число t, что доказывает утверждение задачи.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Верно выписана теорема Виета для исходного трёхчлена (без дальнейшего продвижения)	2 балла
Верно найдены корни исходного трёхчлена и верно записан получающийся трёхчлен (с коэффициентами, выраженными через a и b)	1 балл
Исследованы только несколько конкретных трёхчленов	0 баллов
Выкладки любой длины, не ведущие к доказательству	не оцениваются

9.3. *В окружность с центром O вписан квадрат. Пусть M — середина его стороны, X — произвольная точка на окружности, T — середина отрезка OX. Докажите, что* $\dfrac{MX}{MT}=\sqrt{2}$.



К решению задачи 9.3

Решение:

Способ 1. Введём систему координат с осями, идущими вдоль диагоналей квадрата. Направления осей выберем так, чтобы точка M попала в первую координатную четверть (см. рисунок). Теперь $O(0;0)$, если радиус окружности R, то точка M имеет координаты $M\left(\dfrac{R}{2};\dfrac{R}{2}\right)$, а точка X имеет координаты $X(R\cos\alpha;R\sin\alpha)$ для некоторого угла α. Наконец, точка T получит координаты, равные полусумме координат точек O и X, т. е. $T\left(\dfrac{R\cos\alpha}{2};\dfrac{R\sin\alpha}{2}\right)$. Далее простой подсчёт:

$$MX^2=\left(\frac{R}{2}-R\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{R}{2}-R\sin\alpha\right)^2=R^2\left(\frac{3}{2}-\cos\alpha-\sin\alpha\right);$$

$$MT^2=\left(\frac{R}{2}-\frac{R\cos\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{R}{2}-\frac{R\sin\alpha}{2}\right)^2=\frac{R^2}{4}(3-2\cos\alpha-2\sin\alpha);$$

$$MX^2=2MT^2;\qquad \frac{MX}{MT}=\sqrt{2},$$

что и требовалось доказать.

Способ 2. Очевиден случай, когда точка X лежит на диаметре, проходящем через точку M. Пусть X не лежит на этом диаметре, то есть существует невырожденный треугольник OMX. Достроим его до параллелограмма $OMXY$. По свойству параллелограмма сумма квадратов его сторон равна сумме квадратов его диагоналей, то есть $2OM^2 + 2MX^2 = OX^2 + MY^2$. Заметим, что $MY = 2MT$ и что $OM = \frac{r}{\sqrt{2}}$, где r — радиус окружности. Тогда $2OM^2 = r^2 = OX^2$ и равенство превращается в условие $2MX^2 = 4MT^2$, равносильное доказываемому.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Ход доказательства верен, но доказательство не завершено из-за ошибок в формулах (тригонометрии, теоремы синусов и т. п.)	3 балла
Исследованы только частные случаи расположения точки X на окружности	1 балл

9.4. *Прогульщик Вася каждый понедельник сентября пропускал по одному уроку, каждый вторник — по два урока, среду — по три, четверг — по четыре и пятницу — по пять уроков. Исключение составило 1 сентября: в этот день Вася в честь начала учебного года уроков не прогуливал. Оказалось, что за весь сентябрь Вася пропустил ровно* 64 *урока. На какой день недели пришлось 1 сентября? Ответ обосновать. (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни учебными.)*

Решение: Заметим, что за любые последовательные семь дней каждый день недели встречается ровно 1 раз, поэтому за любые последовательные 7 дней (начиная с 2 сентября) Вася прогуливал $1+2+3+4+5 = 15$ уроков. Значит за период с 2 по 29 сентября он прогулял ровно $15 \cdot 4 = 60$ уроков, поэтому 30 сентября прогулял $64 - 60 = 4$ урока. Это означает, что 30 сентября пришлось на четверг. Тогда на четверг пришлись также и такие числа сентября (вычитаем последовательно 7): 23, 16, 9, 2. А это значит, что 1 сентября пришлось на среду.

Ответ: На среду.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верное рассуждение с неверным ответом из-за неверно взятого числа дней в сентябре (31 вместо 30)	6 баллов
Замечено, что за ЛЮБЫЕ последовательные 7 дней Вася прогуливает 15 уроков	4 балла
Показано, что 1 сентября может прийтись на среду, но не показано, что оно не может быть другим днём	2 балла
Замечено, что 1 и 29 сентября приходятся на один день недели; дальнейших продвижений нет	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

9.5. *В обменном пункте можно совершать только следующие операции:*

1) обменять 2 золотых монеты на три серебряных и одну медную;

2) обменять 5 серебряных монет на три золотых и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных монет. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая? Ответ обоснуйте. Учтите, что обмен денег в банке не является равноценной операцией, то есть при каждом обмене покупательная способность имеющихся у Николая монет несколько уменьшалась.

Решение: В результате каждой операции Николай приобретает ровно 1 медную монету, значит, операций всего было ровно 50. Из них несколько (пусть a) было 1-го типа, остальные $50-a$ — второго. На операции первого типа Николай потратил $2a$ золотых монет, на операциях второго типа заработал $3(50-a)$ золотых монет. Так как золотых монет у него не осталось, то $2a = 3(50-a)$, откуда $a = 30$. Это значит, что на операциях первого типа Николай получил $30 \cdot 3 = 90$ серебряных монет, а на операциях второго типа потерял $(50-30) \cdot 5 = 100$ таких монет. Тогда их количество уменьшилось на $100 - 90 = 10$ штук.

Ответ: На 10 монет.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верный ход решения, но ответ неверен из-за арифметических ошибок	6 баллов
Верно и обоснованно найдено количество операций одного типа (или первого, или второго)	5 баллов
Доказано, что отношение количеств операций 1-го и 2-го типов 3:2 И/ИЛИ обоснованно найдено общее количество операций обоих типов	3 балла
Задача верно решена в предположении равноценности всех обменов (общий случай не исследован)	2 балла
Приведён конкретный пример обменов, показывающий, что ответ 10 возможен, но его единственность не обоснована	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

9.6. *Конечно или бесконечно множество троек* (a, b, c) *целых чисел, для которых верно равенство* $a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$*? Ответ обосновать.*

Решение:

Способ 1. $2(c^2+1) = (c-1)^2 + (c+1)^2$, поэтому можно положить a любым целым числом, в качестве b взять $a+2$, а в качестве c — число $a+1$. Таким образом, множество таких троек бесконечно.

Способ 2. Докажем, что множество натуральных чисел, представимых в виде суммы квадратов двух целых чисел, замкнуто относительно операции умножения. В самом деле, пусть $a = m^2 + n^2$ и $b = p^2 + t^2$ для некоторых целых чисел m, n, p и t. Тогда

$$ab = (m^2 + n^2)(p^2 + t^2) = (mp)^2 + (mt)^2 + (np)^2 + (nt)^2 =$$
$$= (mp)^2 + 2mnpt + (nt)^2 + (mt)^2 - 2mnpt + (np)^2 = (mp + nt)^2 + (mt - np)^2.$$

Числа $mp + nt$ и $mt - np$ — целые, поэтому утверждение доказано.

Так как $2 = 1^1 + 1^2$ и $c^2 + 1 = c^2 + 1^2$, число $2(c^2 + 1)$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел для любого целого числа c. Значит, множество троек целых чисел, для которых верно равенство $a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$, бесконечно.

Ответ: Бесконечно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство бесконечности количества троек	7 баллов
Замечена, но не обоснована (обоснована неверно) конструкция, позволяющая получить бесконечную серию троек чисел	4 балла
Сформулированы, но не доказаны верные утверждения, из которых легко следует утверждение задачи	2 балла
Приведены отдельные примеры подходящих троек в конечном количестве И/ИЛИ верный ответ без обоснования И/ИЛИ неверный ответ	0 баллов