

Математика, 9 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

*Каждая задача оценивается в 7 баллов в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией по математике.*

*Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.*

*Если решения нет, то независимо от продвижения, ставить не более 3 баллов.*

*Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!*

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

- Решение:** Пусть длины палочек в порядке возрастания (точнее, неубывания):  $1, a, b, c, d, e$ .  
По условию,  $a \geq 1$ .  
Предположим, что ни из каких трех палочек треугольник сложить нельзя.  
Тогда,  $b \geq 1 + a \geq 2$ ,  $c \geq a + b \geq 3$ ,  $d \geq b + c \geq 5$ ,  $e \geq c + d \geq 8$ .  
А суммарная длина палочек – больше  $2$  м.
- Ответ:** 216 минут.  
**Решение:** Пусть объём резервуара  $1$ . Время будем измерять в минутах.  
Из трубы с пресной водой вода течёт со скоростью  $1/420$ , а из двух труб – со скоростью  $1/280$ .  
Значит, из трубы с соленой водой –  $1/280 - 1/420 = 1/840$ .  
При этом соль прибывает в резервуар со скоростью  $35/100 \cdot 840 = 1/2400$ .  
Всего в резервуаре накопилось  $17/100$  соли.  
Это происходит за  $(17/100) / (1/2400) = 17 \cdot 24 = 408$  минут.  
За это время солёная вода заполнит  $408 / 840 = 17/35$  резервуара.  
Оставшаяся часть  $(18/35)$  заполняется пресной водой за  $(18/35) / (1/420) = 216$  минут.

3. **Ответ:** 11.

**Решение:** Нечетное число делителей имеют только квадраты натуральных чисел.

Это известный факт, который легко доказать: все делители  $d$  числа  $N$  разбиваются на пары:  $(d, N/d)$ , и только у квадратов есть непарный делитель – квадратный корень.

Если у числа хотя бы два разных простых делителя, то их квадраты – тоже делители.

Вместе с 1 и самим числом делителей становится больше 5.

Значит, у наших чисел только один простой делитель.

Чтобы всего было 5 делителей, эти делители должны быть равны:  $1, p, p^2, p^3, p^4$ .

Итак, числа являются четвертыми степенями простых чисел, не превышающих миллиона.

Таких простых чисел 11: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

4. **Решение:** Докажем сначала этот факт, если квадратов два.

Пусть их стороны равны  $a$  и  $b$ .

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Добавим к обеим частям  $a^2 + b^2$ .

$$\text{Получим, } 2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2.$$

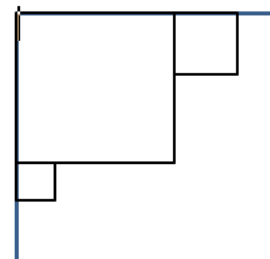
Т.к.  $a^2 + b^2 = 1$ , имеем  $2 \geq (a + b)^2$ , т.е.  $\sqrt{2} \geq a + b$ .

Это значит, что отрезки  $a$  и  $b$  укладываются вдоль отрезка длины  $\sqrt{2}$ ,

а наши квадраты – в квадрат площади 2.

Теперь пусть квадратов три.

Уложим больший из них в угол квадрата площади 2, а два других – вдоль двух сторон, примыкающих к сторонам первого квадрата (см. рис.).



5. **Решение:**

1.  $\triangle KGF = \triangle CDF$  ( $KF = CF$ ,  $GF = DF$ , углы  $CFD$  и  $KFG$  равны, т.к. оба равны углу  $CFG$  минус  $90^\circ$ ).

Значит,  $KG = CD = AC$  и угол  $DCF$  равен углу  $GKF$ . Угол  $NCA$  равен углу  $DCF$ , т.к. оба равны углу  $ACF$  минус  $90^\circ$ .

2.  $\triangle KGF = \triangle CAN$  (две стороны и угол между ними). Отсюда,  $AN = GF$  и угол  $NAC$  равен углу  $FGK$ .

$$GF = BG.$$

Итак,

3.  $\triangle ANE = \triangle GBK$  по двум сторонам и углу между ними ( $EAN$  и  $KGB$ ). Отсюда,  $EN = BK$ , ч.т.д.