Шифр

25 ноября 2015 года

Тексты заданий для муниципального этапа олимпиады по МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 2015/2016 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 10 классов

Номер задания	Баллы
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Общий балл	

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 4 часа.

Желаем вам успеха!

10.1. Положительные числа a, b, c таковы, что точка $A(1;\, 2)$ расположена ниже графика параболы $y = ax^2 + bx + c$. Можно ли однозначно установить, как эта точка расположена (выше, ниже или на) по отношению к графику параболы $y = cx^2 + bx + a$? Ответ обосновать.

10.2. В параллелограмме $ABCD$ известны угол $\angle A = \alpha$ и диагональ $BD = d$. Пусть M и N — основания высот, опущенных из вершины B на прямые CD и AD соответственно. Найдите MN.

10.3. На доске написано несколько различных действительных чисел. Известно, что сумма любых трех из них рациональна, а сумма любых двух из них — иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске? Ответ обосновать.

10.4. Точку плоскости с координатами $(x;\, y)$ разрешено соединить отрезком с точкой, имеющими координаты $(x + 3y;\, y)$ или с точкой, имеющей координаты $(x;\, y - 2x)$. Можно ли при таких условиях соединить ломаной точки $A(19;\, 47)$ и $B(12;\, 17)$? Ответ обосновать.

10.5. Пусть a, b, c и d — натуральные числа и $\dfrac{ad-1}{a+1} + \dfrac{bd-1}{b+1} + \dfrac{cd-1}{c+1} = d$. Найдите все значения, которые может принимать число d.

10.6. На заводе работают ровно 217 женщин, среди которых 17 брюнеток, а остальные 200 — блондинки. Перед Новым Годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала в «Контакте» фамилии ровно 200 женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 13 блондинок.

Пояснительная записка
к пакету задач муниципального этапа
Всероссийской Олимпиады школьников по математике
в 2015-2016 учебном году
10-й класс

1. Общая информация о пакете

Задачи муниципального тура олимпиады подобраны сотрудником Института Математики и Механики УрО РАН к.ф.-м.н. В. Т. Шевалдиным; рецензент — к.ф.-м.н. Д. В. Хлопин. Пакет включает 6 задач. Тематика задач охватывает разделы математики, изучаемые в школьном курсе. Предполагаемое время выполнения заданий — 4 часа.

Задания 10 класса не требуют знаний, выходящих за рамки школьной программы. В пакете есть простые (для десятиклассника) задания. К ним относится задача 10.1 — по сути это задача для школьника, только что узнавшего понятие координат на плоскости и графика функции, а это материал 7-го класса. Также уровня знаний семиклассника хватит для того, чтобы получить решение задачи 10.4. Но по идейной сложности (надо найти неочевидный инвариант) это задача как раз на 10-й класс, причём не самая простая. Проще задачи 10.2 и 10.3, для решения которых требуются соответственно знание описанной около четырёхугольника окружности и понимание иррациональных (рациональных) чисел. 10.5 — тоже стандартно решается, но методами теории чисел, которые в стандартном курсе школы вниманием обделены. Таким образом, это техническая задача на грамотность. Задача 10.6 самая что ни есть олимпиадная. Она что красива по формулировке, допускает идейное короткое решение, понять которое может и ученик начальной школы, а найти и описать не всякий отличник 11-го класса сможет. Все задачи пакета имеют красивую формулировку, их хочется решать. Математические темы задач: координатная плоскость, вписанные четырёхугольники, рациональные и иррациональные числа, инвариант, метод оценки при решении уравнений, делимость, логические конструкции.

Задачи опираются на традиционные олимпиадные темы: алгебра, геометрия, логика и теория чисел. В пакет входят задачи, требующие для своего решения знания, которыми уже обладают десятиклассники. В целом, пакет заданий представляется интересным, сочетающим в решениях заданий как стандартные подходы, так и оригинальные идеи.

2. Информация для участников

Эта же информация приводится на листочках с заданиями, которые раздаются школьникам.

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но рассуждение, приводящее к этому ответу. Наличие только ответа не может быть рассмотрено как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами максимального балла за задачу. Задача признается решенной, если обнаружены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько полно эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается числом баллов от 50 до 100 процентов от числа, даваемых за полное решение.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте. Текст условия при этом переписывать не обязательно, достаточно просто указать номер решаемой задачи.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

3. Информация по проверке

Программный комитет предлагает оценивать каждую задачу, исходя из 7 баллов (согласно рекомендациям Методической комиссии по математике Всероссийской олимпиады школьников). Максимальный балл за весь пакет — 42 балла. В соответствии с этим построены рекомендации по оцениванию путей решения, предложенных программным комитетом. Эти рекомендации имеются отдельно по каждой из задач и приведены в ключах в виде таблицы, стоящей непосредственно после приведённых решений к той или иной задаче. Кроме того, общие положения вынесены в начало ключей. Предполагается, что они должны быть выданы каждому проверяющему. Вот эти общие рекомендации:

1) Каждая задача оценивается исходя из 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший

или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

В этих рекомендациях учтено, что варианты решений, предложенные программным комитетом, далеко не единственные. Если школьник предлагает решение, отличное от предложенного программным комитетом, оценка ни в коем случае не должна снижаться за факт отличия. Такое решение должно быть тщательно изучено с точки зрения корректности логических рассуждений, содержания привлекаемых фактов и правильности их применения. В случае отсутствия ошибок в решении школьника, ему должен быть начислен максимальный балл. Если же решение частично или полностью неправильное, решение о величине начисляемого балла принимается жюри муниципального этапа. В этом случае может быть выставлен как нулевой, так и частичный балл, в зависимости от серьёзности допущенной ошибки.