



Шифр

--	--	--	--

25 ноября 2015 года

Тексты заданий для муниципального этапа олимпиады
по МАТЕМАТИКЕ

**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2015/2016 УЧЕБНОГО ГОДА**

Комплект заданий для учеников 9 классов

Номер задания	Баллы
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Общий балл	

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п. (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 4 часа.

Желаем вам успеха!

9.1. На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске? Ответ обосновать.

9.2. Приведённый квадратный трёхчлен $y = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если прибавить к коэффициенту a любой из этих корней, а из коэффициента b вычесть квадрат этого же корня, то полученный трёхчлен также будет иметь по крайней мере один корень.

9.3. В окружность с центром O вписан квадрат. Пусть M — середина его стороны, X — произвольная точка на окружности, T — середина отрезка OX . Докажите, что $\frac{MX}{MT} = \sqrt{2}$.

9.4. Прогульщик Вася каждый понедельник сентября пропускал по одному уроку, каждый вторник — по два урока, среду — по три, четверг — по четыре и пятницу — по пять уроков. Исключение составило 1 сентября: в этот день Вася в честь начала учебного года уроков не прогуливал. Оказалось, что за весь сентябрь Вася пропустил ровно 64 урока. На какой день недели пришлось 1 сентября? Ответ обосновать. (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни учебными.)

9.5. В обменном пункте можно совершать только следующие операции:

- 1) обменять 2 золотых монеты на три серебряных и одну медную;
- 2) обменять 5 серебряных монет на три золотых и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных монет. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая? Ответ обоснуйте. Учтите, что обмен денег в банке не является равноценной операцией, то есть при каждом обмене покупательная способность имеющихся у Николая монет несколько уменьшалась.

9.6. Конечно или бесконечно множество троек (a, b, c) целых чисел, для которых верно равенство $a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$? Ответ обосновать.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ПАКЕТУ ЗАДАЧ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
В 2015-2016 УЧЕБНОМ ГОДУ
9-Й КЛАСС

1. Общая информация о пакете

Задачи муниципального тура олимпиады подобраны сотрудником Института Математики и Механики УрО РАН д.ф.-м.н. В. Т. Шевалдиным; рецензент — к.ф.-м.н. Д. В. Хлопин. Пакет включает 6 задач. Тематика задач охватывает разделы математики, изучаемые в школьном курсе. Предполагаемое время выполнения заданий — 4 часа.

Задачи 9-го класса требуют приличной математической грамотности и математических знаний не выходящих за базовый курс школы (1 — 9 класс). Пожалуй, самой простой выглядит задача 9.4. Решить её может любой аккуратный ученик начальной школы, умеющий считать в пределах сотни и знающий календарь: достаточно перебрать семь вариантов. Однако такое переборное решение весьма громоздко. Представляется весьма вероятным, что до верного ответа в этой задаче большинство школьников дойдёт, а вот с обоснованием его единственности будут сложности. Именно поэтому данная задача — четвёртая в пакете, а не первая. Задачи 9.1 — 9.3 таких тонкостей лишены, это привычная для школьников 9-го класса алгебра и геометрия, просто более сложная. Эти задачи допускают много разных простых решений. Задача 9.5 более трудна: по сути в ней требуется провести анализ процесса, который может протекать по-разному, найти его инвариант и этим доказать единственность ответа (сам ответ получить не очень сложно). Задача 9.6 требует построения бесконечной серии числовых примеров. Это и непривычно, и не очень просто для девятиклассника, хотя и сложной задачу не назвать.

В пакете затронуты темы: свойства действительных чисел, квадратный трёхчлен и его свойства, описанная около многоугольника окружность, инвариант процесса, числовой конструктив, свойства григорианского календаря. В пакете нет очень сложных задач, предполагается, что каждая задача будет решена по крайней мере одним — двумя учениками. Однако задачи достаточно разнообразны, и решить весь пакет представляется делом непростым. Авторы старались расположить задачи по возрастанию уровня сложности, однако представляется весьма вероятным, что для многих участников олимпиады проще окажутся задачи с большими номерами. В среднем сложность пакета невысока, соответствует муниципальному уровню.

2. Информация для участников

Эта же информация приводится на листочках с заданиями, которые раздаются школьникам.

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но рассуждение, приводящее к этому ответу. Наличие только ответа не может быть рассмотрено как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами максимального балла за задачу. Задача признается решенной, если обнаружены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько полно эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается числом баллов от 50 до 100 процентов от числа, даваемых за полное решение.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п. (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте. Текст условия при этом переписывать не обязательно, достаточно просто указать номер решаемой задачи.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

3. Информация по проверке

Программный комитет предлагает оценивать каждую задачу, исходя из 7 баллов (согласно рекомендациям Методической комиссии по математике Всероссийской олимпиады школьников). Максимальный балл за весь пакет — 42 балла. В соответствии с этим построены рекомендации по оцениванию путей решения, предложенных программным комитетом. Эти рекомендации имеются отдельно по каждой из задач и приведены в ключах в виде таблицы, стоящей непосредственно после приведённых решений к той или иной задаче. Кроме того, общие положения вынесены в начало ключей. Предполагается, что они должны быть выданы каждому проверяющему. Вот эти общие рекомендации:

1) Каждая задача оценивается исходя из 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательно краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставяет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

В этих рекомендациях учтено, что варианты решений, предложенные программным комитетом, далеко не единственные. Если школьник предлагает решение, отличное от предложенного программным комитетом, оценка ни в коем случае не должна снижаться за факт отличия. Такое решение должно быть тщательно изучено с точки зрения корректности логических рассуждений, содержания привлекаемых фактов и правильности их применения. В случае отсутствия ошибок в решении школьника, ему должен быть начислен максимальный балл. Если же решение частично или полностью неправильное, решение о величине начисляемого балла принимается жюри муниципального этапа. В этом случае может быть выставлен как нулевой, так и частичный балл, в зависимости от серьёзности допущенной ошибки.