Муниципальный этап

Всероссийской олимпиады школьников

по математике Алтайский край

2016 – 2017 учебный год

Барнаул 2016

Сборник содержит материалы для проведения муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в Алтайском крае. Задания составлены члены предметно-методической комиссии муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников 2016/2017 учебного года олимпиады школьников по математике Саженков А.Н., Оскорбин Д. Н., Саженкова Т.В., Папин А.А. (Алтайский государственный университет).

Рекомендации по проверке олимпиадных работ

Любое правильное решение оценивается в 7 баллов.

Недопустимо снятие баллов за слишком длинное решение, или за решение школьника, отличающееся от приведенного в методических разработках.

Важно отметить, что исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) не являются основанием для снятия баллов

В то же время, любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Жюри рассматривает записи решений, приведенные в чистовике. Черновик рассматривается только в случае отсутствия решения в чистовике.

Каждая работа должна быть оценена двумя членами Жюри. В случае расхождения их оценок вопрос об окончательном определении баллов, выставляемых за решение указанной задачи, определяется председателем Жюри или назначенным им старшим по классу.

Критерии оценивания

7 баллов – Полное верное решение.

6-7 баллов – Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.

5-6 баллов – Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.

4 балла – Применять в исключительных случаях, с обязательным утверждением председателем Жюри или назначенным им старшим по классу.

2–3 балла – Задача не решена, но сделано существенное продвижение в решении задачи.

1 балл – Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

0 баллов – Решение неверное, продвижения в решении отсутствуют.

Особенности олимпиады 5-6-7 классов. Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 5-6-7 класса, не умеют чётко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 5-6-7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

10 класс

10.1. Числа a и b таковы, что $|a| \neq |b|$ и $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=6$. Найдите значение выражения $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}+\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$.

Ответ: 18/7. Из соотношения $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=6$ после приведения к общему знаменателю и преобразований в числителе получим соотношение $\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}=6$ или $a^2=2b^2$. Выражение $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}+\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$ после приведения к общему знаменателю и преобразований в числителе принимает вид $\frac{2a^6+2b^6}{a^6-b^6}$.

Заменим a^2 на $2b^2$ и получим $\frac{2\left(2b^2\right)^3+2b^6}{\left(2b^2\right)^3-b^6}=\frac{18}{7}$.

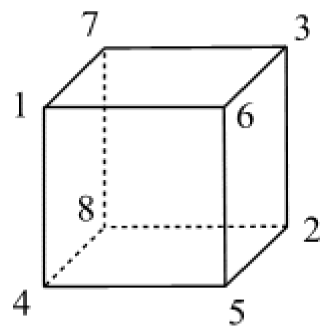
Комментарий. Получение ответа для конкретных значений a, b оценивается не более чем в 2 балла.

10.2. Целое число a таково, что числа $5a-1$ и $a-10$ делятся на некоторое простое число p. Докажите, что число $a-3$ тоже делится на p.

Число $5(a-10)$ тоже делится на p. Значит, разность чисел $(5a-1)$ и $5(a-10)$ тоже делится на p. Эта разность равна 49. Единственным простым числом, на которое делится число 49, является число $p=7$. Отсюда следует, что $a-3=(a-10)+7$ делится на p.

10.3. В вершины куба расставляются числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, так чтобы сумма любых трех чисел принадлежащих любой грани была не меньше, чем 10. Найдите минимально возможную сумму четырех чисел, принадлежащих одной грани.

Ответ: 16. *Оценка.* Рассмотрим произвольную грань. Если самое большое число, записанное в вершине этой грани, не больше чем 5, то сумма остальных чисел не больше, чем 4 + 3 + 2 = 9. Значит самое большое число, записанное в вершине любой грани не меньше, чем 6, а минимально возможная сумма четырех чисел, принадлежащих одной грани не меньше, чем 16. *Пример* на рисунке, где минимальная сумма на «ближней» грани.



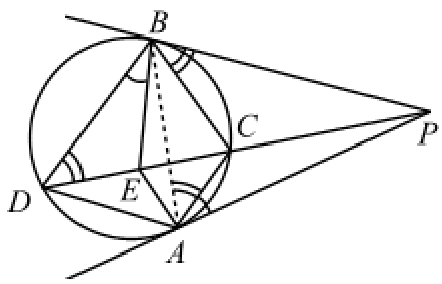
Комментарий. Ответ без примера – 1 балл, пример – 2 балла, оценка без примера – 3 балла. Ответ, пример и оценка – 7 баллов.

10.4. Первоначально имеется куча, в которой n камней ($n \geq 2$). Два игрока по очереди делят любую из имеющихся куч (вначале игры она одна) на две или три непустые кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какой игрок имеет выигрышную стратегию?

Ответ: выигрывает первый игрок. Первый ход первого игрока: при четном n разделить кучу на две равные, если n нечетно, то третья куча из одного камня. Стратегия первого игрока в дальнейшем такая. Допустим, перед вторым игроком имеются «кучи» с одним камнем, а все остальные кучи можно разбить на пары с равным количеством камней. Ход второго игрока будет сделан с одной кучей (имеющей более одного камня). Первый игрок отвечает таким же ходом на парной куче. Отметим ещё раз, что после ответного хода первого игрока перед вторым игроком имеются «кучи» с одним камнем, а все остальные кучи можно разбить на пары с равным количеством камней. По условию первый ход первого игрока в соответствии с описанной стратегией возможен. Далее, если второй игрок может сделать ход, то у первого игрока есть ответ (в парную кучу). Наконец, на каждом шаге количество куч увеличивается, а куч не может быть больше, чем n. Значит, игра заканчивается победой первого игрока.

Комментарий. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрение частных случаев не оценивается. Если верно разобран только один из случаев (n четно либо n нечетно) – 3 балла.

10.5. Из точки P, лежащей вне окружности проведены касательные PA и PB и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D, считая от точки P. Но хорде CD выбрана точка E так, что углы DBE и CAP равны. Докажите, что точки A, P, B, E лежат на одной окружности.



Угол PBC – угол между касательной BP и хордой BC равен половине дуги BC. Углы BDC и BAC тоже равны половине дуги BC, как вписанные. Итак, углы PBC, BDC и BAC равны между собой. Угол BEP равен сумме углов BDC и DBE, как смежный угол к BED. Угол BAP равен сумме углов CAP и BAC. Значит, углы BEP и BAP равны. Точки A, P, B, E лежат на одной окружности, поскольку отрезок BP виден из точек E и A под одним и тем же углом.