Для педагога

Всероссийская олимпиада школьников 2016г
муниципальный этап
Математика
10 класс

Общее время выполнения работы – **3 часа 55 мин (235 мин).**
Максимальное количество баллов – **35.**

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1
Доказать, что
$$[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$$
для любого вещественного x. (Напомним, что [x] – это целая часть вещественного числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)
Количество баллов 7
Решение
Положим, что $x=y+\alpha$, где y - целая, а α - дробная часть этого числа.
Рассмотрим три возможных случая.
1. $\alpha\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$. Тогда левая часть выражения равна:
$S(x)=y+y+y=3y=[3y+3\alpha]=[3x]$.
2. $\alpha\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Тогда левая часть выражения равна:
$S(x)=y+y+(y+1)=3y+1=[3y+3\alpha]=[3x]$.
3. $\alpha\in\left[\frac{2}{3},1\right)$. Тогда левая часть выражения равна:
$S(x)=y+(y+1)+(y+1)=3y+2=[3y+3\alpha]=[3x]$.
Нужное тождество доказано.

Задание 2
Доказать, что число
$$\underbrace{111\ldots111}_{2017}\underbrace{555\ldots555}_{2016}6$$

является полным квадратом. (Таким образом, дано число, в начале которого стоит 2017 единиц, затем 2016 пятерок и затем одна цифра 6.)

Количество баллов 7

Решение

Пусть

$$x = \underbrace{111\ldots111}_{2017}\underbrace{555\ldots555}_{2016}6$$

Тогда

$$x = 10^{2017} \cdot \frac{10^{2017}-1}{9} + 50 \cdot \frac{10^{2016}-1}{9} + 6 = \frac{(10^{2017}+2)^2}{3^2} = \left(\frac{10^{2017}+2}{3}\right)^2$$

Очевидно, что дробь в скобках является целым числом, т.к. ее числитель делится на 3.

Другой способ оформления этих вычислений:

Обозначим:

$$y = \underbrace{111\ldots111}_{2017}$$

$$z = 1\underbrace{000\ldots000}_{2017}$$

Заметим, что

$$9y + 1 = z$$

Получаем:

$$x = yz + 5y + 1 = y(9y+1) + 5y + 1 = 9y^2 + 6y + 1 = (3y+1)^2$$

Задание 3

Пусть *O* – центр окружности, описанной около треугольника *ABC*, $\angle AOC = 60^o$. Найдите угол *AMC*, где *M* — центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Количество баллов 7

Ответ:

165^o или 105^o

Решение

Если точки *O* и *B* лежат по разные стороны от прямой *AC*, то градусная мера дуги *AC* , не содержащей точки *B* , равна 360^o-60^o=300^o , поэтому

$\angle ABC = (1/2) \cdot 300^o = 150^o$.

Сумма углов при вершинах *A* и *C* треугольника *ABC* равна 180^o-150^o = 30^o , а т.к. *AM* и *CM* – биссектрисы треугольника *ABC* , то сумма углов при вершинах *A* и *C* треугольника *AMC* равна 15^o. Следовательно,

$\angle AMC = 180^o - 15^o = 165^o$.

Если же точки *O* и *B* лежат по одну сторону от прямой *AC*, то аналогично получим, что $\angle AMC = 105^o$.

Задание 4

Вершины правильного 2017-угольника занумеровали (по часовой стрелке) числами от 1 до 2017. Можно ли вершины другого такого же многоугольника занумеровать (этими же числами, но возможно в другом порядке) так, чтобы при любом наложении первого многоугольника на второй у них нашлась бы вершина с одинаковым номером? (При наложении вершины совмещаем с вершинами; переворачивать многоугольники нельзя, а поворачивать можно).

Количество баллов 7

Ответ:

можно

Решение

Занумеруем вершины второго многоугольника числами от 1 до 2017 против часовой стрелки. Рассмотрим точки, в которых находятся вершины с номером 1. Они делят периметр многоугольника на две части, одна из которых состоит из четного числа сторон (и, значит, содержит нечетное число вершин). Рассмотрим вершину, расположенную в середине этой части. Её номер – один и тот же для обоих многоугольников.

Комментарий

Возможны и другие примеры нумерации – например, с шагом 2 по часовой стрелке, или с шагом 4 против часовой стрелки, и т.д.

Оценивание

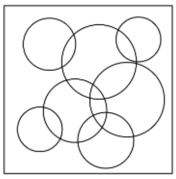
Полное решение – 7 баллов. Пример без доказательства – 2 балла. Верный ответ без примера – 0 баллов.

Задание 5

Внутри квадрата с единичной стороной построено несколько окружностей, сумма длин которых равна 100. Докажите, что существует прямая, пересекающая по крайней мере 32 окружности.

Количество баллов 7

Решение



Напомним, что длина окружности вычисляется по формуле $L = \pi d$, где $\pi = 3{,}14\ldots < 3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$, а d – диаметр окружности.

По условию:

$$L_1 + L_2 + \ldots + L_k = 100$$

или

$$\pi d_1 + \pi d_2 + \ldots + \pi d_k = 100$$

или

$$\pi(d_1 + d_2 + \ldots + d_k) = 100.$$

Разделим левую и правую части последнего равенства на π. Получим:

$$(d_1 + d_2 + \ldots + d_k) = \frac{100}{\pi} > \frac{6 \cdot 100}{19} > 31{,}5.$$

Таким образом, сумма диаметров окружностей больше 31.

Учитывая, что все диаметры меньше единицы, мы можем сделать вывод о том, что в квадрате построено не меньше 32 окружностей. Спроектируем эти окружности на одну из сторон квадрата. Проекцией каждой окружности будет отрезок с длиной, равной диаметру проектируемой окружности.

Сумма длин получившихся отрезков больше 31 (она равна $(d_1 + d_2 + \ldots + d_k)$). Это означает, что единичный отрезок покрыт отрезками, сумма длин которых больше 31,5. Следовательно, сторона квадрата «покрыта» в некоторых точках более чем 31 «слоем». Если мы проведем через такую точку прямую, перпендикулярную стороне квадрата, то она «проткнет» больше 31 окружности.

Что и требовалось доказать.