

10 класс

Задача 1. Сравните, какое из чисел больше $A = \frac{1}{2015} \cdot 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2015}$ или $B = \frac{1}{2016} \cdot 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2016}$

Ответ: $A > B$.

Указание. Рассмотреть разность $A - B$ и заметить, что первое число больше 1, а $\frac{1}{2015 \cdot 2016} > \frac{1}{2016^2}$, откуда получаем, что $A - B > 0$.

Задача 2. На доске записаны две дроби. Их можно заменить двумя другими дробями, либо одновременно прибавив 1 или -1 к числителю или знаменателю какой-то одной дроби, либо одновременно прибавив 1 или -1 к числителю одной дроби и знаменателю другой дроби, соблюдая условие, что числители и знаменатели не должны стать равны единице. Можно ли такими операциями из дробей $\frac{2015}{2016}$ и $\frac{2017}{2018}$ получить дроби $\frac{2016}{2017}$ и $\frac{2015}{2018}$?

Решение. Если даны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то указанные операции не меняют значение величины $(b + d) - (a + c)$. Для дробей $\frac{2015}{2016}$ и $\frac{2017}{2018}$ эта величина равна 2, а для дробей $\frac{2016}{2017}$ и $\frac{2015}{2018}$ она равна 4, следовательно, получить из первых дробей вторые невозможно.

Задача 3. (Р.М. Смаллиан) Мёрдок был посажен в темницу, но вскоре бежал из-под стражи и покинул пределы страны. Но потом вновь проник в страну, основательно загримировавшись, чтобы никто не мог узнать его. И на этот раз он был арестован вместе с одним рыцарем и одним лжецом (рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжёт). Все трое (обозначим их A , B и C) предстали перед судом и дали следующие показания:

A: Меня зовут Мёрдок.

B: Это правда.

C: Я не Мёрдок.

Кто из троих Мёрдок?

Решение. Если A – Мёрдок, то все три показания истинны, что невозможно, так как один из подсудимых лжец. Если C – Мёрдок, то все три показания ложны, что невозможно, так как один из подсудимых рыцарь. Следовательно, B – Мёрдок.

Задача 4. Докажите, что для всякого натурального числа существует кратное ему число, записываемое только цифрами 1 и 0.

Решение. Рассмотрим $n+1$ число 1, 11, 111, ... 11...1. Среди этих чисел существуют по крайней мере два числа, которые при делении на n дают один и тот же остаток. Разность таких чисел записывается с помощью цифр 1 и 0.

Задача 5. (Л. Емельянов) Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_o и C_o соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC , пересекается с прямой A_oC_o в точке P . Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC .

Указание.

Обозначим центр вписанной окружности через I . Пусть B_o – точка пересечения биссектрисы угла B с описанной окружностью. Доказать, что точки B и I – симметричны относительно прямой A_oC_o , т.е. отрезок A_oP – серединный перпендикуляр к отрезку BI . Тогда угол между хордой A_oB окружности и прямой BP равен вписанному углу этой окружности, опирающемуся на дугу A_oB . По теореме, обратной теореме об угле между касательной и хордой, можно сделать вывод, что BP – касательная к окружности.