2016 год

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап

Решения задач

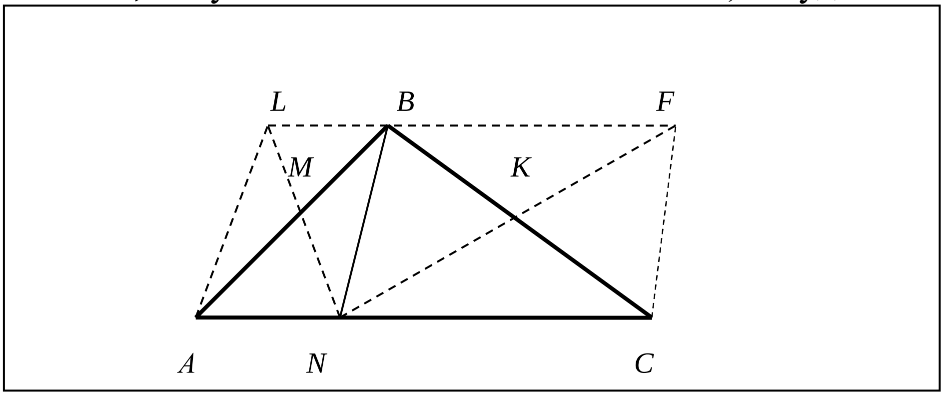
10 Класс

1. Обозначим число 2015 за a. Тогда $2014\cdot 2015\cdot 2016\cdot 2017+1$ =
= $(a-1)a(a+1)(a+2)+1$ = $(a^2+a)\cdot(a^2+a-2)+1$ = $(a^2+a)^2-2(a^2+a)+1$ =
$=(a^2+a-1)^2$.

Поэтому, $2014\cdot 2015\cdot 2016\cdot 2017+1$ = $(2015^2+2015-1)^2=4062239\cdot 4062239$.

2. Заметим, что все члены последовательности, начиная с sin 1000º, равны между собой, так как разность между числами 10^{k+1} и 10^k при натуральных k > 2 кратна 360. Действительно 10^{k+1} - 10^k = $10^k(10-1)$ = $9\cdot 10^k$ = $9\cdot 4\cdot 10\cdot 25\cdot 10^{k-3}\vdots 360$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что sin 1º > 0, sin 10º > 0, sin 100º > 0, sin 1000º = sin (360º·3 - 80º) = sin (-80º) < 0. Значит, и остальные члены последовательности будут отрицательные. Таким образом, положительных членов среди первых 100 членов последовательности будет ровно три.
Ответ: 3.

3. Так как M и K являются серединами сторон, то продолжим отрезки NM и NK за указанные точки на такое же расстояние и соединим точки L, B, A, N; а также F, B, N, C. Тогда четырехугольники $ALBN$, $NBFC$ являются параллелограммами. Так как в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон, то имеем:
$NF^2+BC^2=2NB^2+2NC^2$ (для параллелограмма $NBFC$) и
$AB^2+NL^2=2AN^2+2NB^2$ (для параллелограмма $ALBN$).
Выразим из первого равенства $NF^2=2NB^2+288-441$ и, учитывая, что MN=KN, получим: $AB^2+2NB^2-153=72+2NB^2$, откуда AB = 15 см.



Ответ: 15 см.

4. *Первый способ.* Рассмотрим различные случаи:

1) Если $x \le 0$, то левая часть уравнения будет положительная, поэтому уравнение не имеет корней.

2) Преобразуем уравнение $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ к виду: $(x^4 + x^2 + 1)(x - 1) = x^6$. Данное уравнение не имеет решений при $0 < x < 1$.

3) Преобразуем уравнение $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ к виду: $(x^5 + x^3 + x)(x - 1) + 1 = 0$. Данное уравнение не имеет решений при $x \ge 1$.

Таким образом, ни при каком действительном x данное уравнение не имеет решений.

Второй способ. Домножим обе части уравнений $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ на $x + 1$. Тогда получим уравнение $x^7 + 1 = 0$, которое имеет корень $x = -1$. Но проверкой убеждаемся, что число $x = -1$ не является корнем исходного уравнения.

5. Заметим, что нечетное полупростое число может быть лишь суммой двойки и нечетного простого числа.

Покажем, что три подряд идущих нечетных числа $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, больших 25, не могут быть полупростыми одновременно. Предположим противное. Тогда получим, что числа $2n - 1$, $2n + 1$, $2n + 3$ – простые, и все они больше 3. Но одно из этих трех чисел делится на 3. Получаем противоречие. Поэтому три подряд идущих нечетных числа $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, больших 25, не могут быть полупростыми одновременно.

Заметим, что среди любых шести последовательных натуральных чисел есть три подряд идущих нечетных числа, значит, последовательных полупростых чисел не может быть больше пяти. Пять подряд идущих чисел могут быть полупростыми; например, 30 = 17 +13, 31 = 29 + 2, 32 = 19 + 13, 33 = 31 + 2, 34 = 23 + 11. Существуют и другие примеры.

Ответ: 5.