10 класс

1. Существует ли пара, неравных друг другу целых чисел $a, b,$ для которых справедливо равенство

$$\frac{a}{2015} + \frac{b}{2016} = \frac{2015+2016}{2015 \cdot 2016}.$$

Если такой пары не существует, то обоснуйте. Если такая пара существует, то приведите пример.

Составитель Луценко В.И.

2. В парламенте некоторого государства 2016 депутатов, которые делятся на 3 фракции: «синих», «красных» и «зеленых». Каждый из депутатов или всегда говорит правду, или всегда лжёт. Каждому из депутатов задали по три следующих вопроса.

1) Входите ли вы в фракцию «синих»?
2) Входите ли вы в фракцию «красных»?
3) Входите ли вы в фракцию «зеленых»?

На первый вопрос утвердительно ответили 1208 депутатов, на второй вопрос утвердительно ответили 908 депутатов, а на третий вопрос утвердительно ответили 608 депутатов. В какой фракции депутатов, которые лгут, больше, чем депутатов, которые говорят правду, и на сколько?

Составитель Исаев К.П.

3. В настоящее время курс доллара и евро представлен так: D=6 юаней и E=7 юаней. Народный банк Китая определяет курс юаня вне зависимости от состояния рынка. И придерживается тактики примерного равенства валют. Один работник банка предложил руководству следующую схему изменения курса. За один год курс разрешается менять по следующим четырем законам. Либо менять D и E на пару (D+E, 2D ± 1), либо на пару (D+E, 2E ± 1). Причем запрещается единовременное равенство курсов доллара и евро.
Например: Из пары (6, 7) через один год можно сделать следующие пары: (13, 11), (11,13), (13,15) или (15,13). Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных единовременных курсов через 101 год.

Составитель Луценко В.И.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. Из оснований высот BM и CN проведены перпендикуляры ML к NC и NK к BM. Найдите угол при вершине A, если известно отношение KL:BC=3:4.

Составитель Луценко В.И.

5. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$, - геометрическая прогрессия, а последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_{2016}$ - арифметическая прогрессия. Известно, что среди всех квадратных трехчленов $P_i(x) = x^2 + a_i x + b_i$, $i = 1, \ldots, 2016$ только один квадратный трехчлен $P_k(x)$ имеет действительные корни. Найдите все возможные значения k.

Составитель Трунов К.В.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Решения задач 10 класс.

1. . Существует ли пара, неравных друг другу целых чисел $a, b,$ для которых справедливо равенство

$$\frac{a}{2015}+\frac{b}{2016}=\frac{2015+2016}{2015 \cdot 2016}.$$

Если такой пары не существует, то обоснуйте. Если такая пара существует, то приведите пример.

Решение.

Умножим равенство на число $2015 \cdot 2016$. Получим следующее уравнение

$$2016a + 2015b = 2015 + 2016$$

Перепишем уравнение в следующем виде

$$2016(a-1) = 2015(1-b)$$

Так как числа 2016, 2015 взаимно простые, то $(a-1)$ делиться нацело на 2015, т.е. существует целое число k, для которого справедливо равенство $a-1 = 2015k \Longrightarrow 1-b = 2016k \Longrightarrow a = 2015k+1; b = 1-2016k$.

Подставив значения $a = 2015k+1; b = 1-2016k$ для любого целого k в исходное уравнение получим верное тождество.

При $k=1, a=2016, b=-2015$.

При $k=-1, a=-2014, b=2017$.

При $k=2, a=4031, b=-4031$.

При $k=-2, a=-4029, b=4033$.

Могут быть представлены и другие различные примеры

Можно было догадаться

$$\frac{2016}{2015}+\frac{-2015}{2016}=\frac{2015+2016}{2015 \cdot 2016}$$

$$\frac{2016^2-2015^2}{2015 \cdot 2016}=\frac{2015+2016}{2015 \cdot 2016}$$

Рекомендации по проверке.
Приведен какой-нибудь правильный пример -7 баллов

2. В парламенте некоторого государства 2016 депутатов, которые делятся на 3 фракции: «синих», «красных» и «зеленых». Каждый из депутатов или всегда говорит правду, или всегда лжёт. Каждому из депутатов задали по три следующих вопроса.
1) Входите ли вы в фракцию «синих»?
2) Входите ли вы в фракцию «красных»?
3) Входите ли вы в фракцию «зеленых»?
На первый вопрос утвердительно ответили 1208 депутатов, на второй вопрос утвердительно ответили 908 депутатов, а на третий вопрос утвердительно ответили 608 депутатов. В какой фракции депутатов, которые лгут, больше, чем депутатов, которые говорят правду, и на сколько?
Решение.
Обозначим количество депутатов, говорящих правду во фракциях «синих», «красных» и «зеленых», r_1, r_2 и r_3 соответственно, а количество депутатов, говорящих ложь во фракциях «синих», «красных» и «зеленых», l_1, l_2 и l_3 соответственно.
По условию задачи:
$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + l_1 + l_2 + l_3 = 2016, \\ r_1 + l_2 + l_3 = 1208, \\ r_2 + l_1 + l_3 = 908, \\ r_3 + l_1 + l_2 = 608. \end{cases}$$
Пусть $l_1 - r_1 = a, l_2 - r_2 = b, l_3 - r_3 = c.$
Вычитая из второго уравнения системы третье, получим
$b - a = 300.$ Или $a = b - 300.$
Вычитая из третьего уравнения системы четвертое, получим
$c - b = 300.$ Или $c = b + 300.$
Вычитая из суммы второго, третьего и четвертого уравнения первое уравнение, получим
$l_1 + l_2 + l_3 = 708$. Откуда, $r_1 + r_2 + r_3 = 1308.$
Тогда $a + b + c = -600.$ Или $3b = -600.$
Итак, $b = -200, a = -500, c = 100.$ То есть лжецов больше во фракции «зеленых» на 100 человек.
Ответ: во фракции «зеленых» на 100 человек.
Рекомендации по проверке.
Правильно составлена математическая модель задачи – 3 балла.

3. В настоящее время курс доллара и евро представлен так: D=6 юаней и E=7 юаней. Народный банк Китая определяет курс юаня вне зависимости от состояния рынка. И придерживается тактики примерного равенства валют. Один работник банка предложил руководству следующую схему изменения курса. За один год курс разрешается менять по следующим четырем законам. Либо менять D и E на пару (D+E, 2D ± 1), либо на пару (D+E, 2E ± 1). Причем запрещается единовременное равенство курсов доллара и евро.

Например: Из пары (6, 7) через один год можно сделать следующие пары: (13, 11), (11,13), (13,15) или (15,13). Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных единовременных курсов через 101 год.

Решение.

Заметим, что если D и E разной четности, то их сумма нечетная, а если одинаковой четности, то четная. Второе число в паре всегда нечетное. Вначале у нас пара ЧН.

Через один год Ч+Н=Н, Н

Через два года Н+Н=Ч, Н. И т.д.

Т.е. через нечетное количество лет будет пара из нечетных чисел.

Так как они не совпадают, то наименьшая разность может быть только 2.

Также докажем, что через четное количество лет можно добиться разности равной 1. Докажем данный факт методом математической индукции.

При n=1, т.е. через год (13, 11) разность равна 2. При n=2 (24, 13·2 – 1=25). Разность равна 1. Пусть для n=2k разность равна 1, т.е. $(2m; 2m-1) \Rightarrow (4m-1; 4m-3)$ разность равна 2. Если n=2k–1 разность, по предположению индукции, равна 2, то тогда при n=2k из двух курсов (2m; 2m+2) ⇒ (4m+2; 4m+3). Разность равна 1. Следовательно, через 101 год можно сделать наименьшую разность 2.

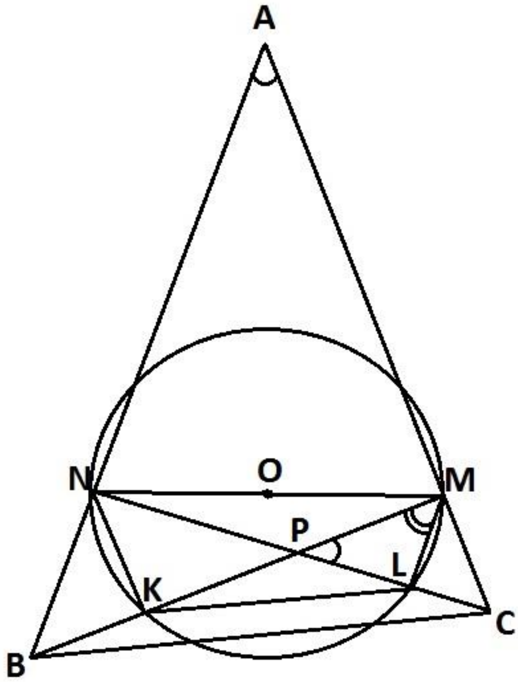
Ответ: 2.

Рекомендации по проверке.

Доказан, только, факт чередование четности разности курсов – 2 балла

Ответ без обоснования – 0 баллов.

4. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Из оснований высот *BM* и *CN* проведены перпендикуляры *ML* к *NC* и *NK* к *BM*. Найдите угол при вершине *A*, если известно отношение *KL*:*BC*=3:4.



Решение.

Докажем, что треугольники *NAM* и *CAB* подобны с коэффициентом подобия $\cos A$. Отношение катета *AM* к гипотенузе *AB* равно $\cos A$. Аналогично *AM*/*AC*=$\cos A$.

Так как угол A у данных треугольников общий, а соответствующие стороны пропорциональны, то треугольники подобны с $k = \cos A$. Поэтому верна пропорция и для третьей пары сторон подобных треугольников

$$\frac{MN}{BC} = cosA.$$

В четырехугольнике *ANPM* два противоположных прямых угла, поэтому

$\angle NPM = 180^{\circ} - \angle A \Longrightarrow \angle MPL = \angle A \Rightarrow \angle KML = \angle PML = 90^{\circ} - \angle A$

Два прямых угла опираются на одну и ту же гипотенузу, следовательно, они вписаны в одну окружность с радиусом $R = MN/2$. По теореме синусов верны равенства

$$\frac{KL}{\sin(90^{\circ} - A)} = 2R = 2NO = MN,$$

$$\frac{KL}{cosA} = MN = BC\,cosA \Rightarrow \frac{KL}{BC} = cos^2A \Rightarrow cos^2A = \frac{3}{4} \Rightarrow cosA = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Следовательно, $A = 30°$

Ответ: $A = 30°$

Рекомендации по проверке.

За отсутствие доказательства подобия треугольников *NAM* и *CAB* балы не снимать. Считать известным фактом.

За присутствие только доказательства подобия треугольников *NAM* и *CAB* баллы не добавлять, т. е. 0 баллов.

Если доказано только равенства углов $\angle MPL = \angle A$ или $\angle KML = \angle PML = 90^{\circ} - \angle A$, то 1 балл.

Если присутствует окружность, описанная около четырехугольника *ANPM*, то добавляется 1 балл.

5. Последовательность чисел $a_1, a_2,, \ldots, a_{2016}$, - геометрическая прогрессия, а последовательность $b_1, b_2,, \ldots, b_{2016}$ - арифметическая прогрессия. Известно, что среди всех квадратных трехчленов $P_i(x)=x^2+a_i\,x+b_i$, $i=1,\ldots,2016$ только один квадратный трехчлен $P_k(x)$ имеет действительные корни. Найдите все возможные значения *k*.

Решение: Если $a_1=3, a_2=1,, \ldots, a_{2016}=\frac{1}{3^{2016}}$, $b_1=1, b_2=2,, \ldots, b_{2016}=2016$, то $k=1$. Если $a_1=\frac{1}{3^{2016}}$, $a_2=\frac{1}{3^{2015}}$,,..., $a_{2015}=1$, $a_{2016}=3$, $b_1=2016, b_2=2015,, \ldots$, $b_{2015}=2$, $b_{2016}=1$, то $k=2016$.

Пусть теперь $1<k<2016$. Тогда квадратный трехчлен $P_k(x)$ имеет действительные корни (то есть $D_k=a_k^2-4b_k \geq 0$) , а остальные не имеют. Рассмотрим квадратные трехчлены $P_{k-1}(x)$ и $P_{k+1}(x)$.

$D_{k-1}=a_{k-1}^2-4b_{k-1}<0$ и $D_{k+1}=a_{k+1}^2-4b_{k+1}<0$. Тогда с одной стороны

$D_{k-1}+D_{k+1}<0$, а с другой $D_{k-1}+D_{k+1}= a_{k-1}^2 + a_{k+1}^2 - 4(b_{k-1}+b_{k+1}) \geq 2a_{k-1}a_{k+1} - 4(b_{k-1}+b_{k+1})$ (используем $a_{k-1}^2 + a_{k+1}^2 \geq 2a_{k-1}a_{k+1}$). А так $a_1, a_2,, \ldots, a_{2016}$, - геометрическая прогрессия, то $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1}$, а последовательность $b_1, b_2,, \ldots, b_{2016}$ - арифметическая прогрессия, то $b_k = \frac{b_{k-1}+b_{k+1}}{2}$. Получаем , что $D_{k-1}+D_{k+1} \geq 2a_k^2 - 8b_k = 2D_k \geq 0$ - противоречие. Следовательно, *к* может принимать только значения равные 1 и 2016.

Ответ: 1; 2016

Рекомендации по проверке.

При правильном решении для значений $k=1$ и $k=2016$ не приведены примеры последовательностей – 5 баллов.

Указаны только значения $k=1$ и $k=2016$, без примеров последовательностей – 0 баллов.

Указаны только значения $k=1$ и $k=2016$ с примерами последовательностей – 2 балла.