Решения олимпиадных заданий муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2016-2017 учебного года

10 -й класс.

10.1. Найдите все корни уравнения $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d)$, если известно, что $a+d=b+c=2016$ и $a\neq c$ (сами числа не даны).

Решение. Раскрываем скобки $x^2-(a+b)x+ab=x^2-(c+d)x+cd$,
т.е. $(c+d-a-b)x=cd-ab$. По условию $c-a=d-b$ - обозначим это через r.
Тогда $a=c-r$, $d=b+r$ и $cd-ab=c(b+r)-(c-r)b=(b+c)r=2016r$
Т.о. (т.к. $c-a=r$, $d-b=r$) $2rx=2016r$, $x=1008$ ($r\neq0$ по условию).

Замечание. Есть другие решения. Например: Пусть $f(x)=(x-a)(x-b)$, $g(x)=(x-c)(x-d)$. Тогда условие $a+d=b+c$ дает тождество $g(x)=f(x+a-c)$, и уравнение $f(x)=g(x)$ сводится к уравнению $f(x)=f(x+a-c)$, что означает симметрию точек x и $x+a-c$ относительно абсциссы $x_0=\frac{a+b}{2}$ вершины параболы $y=f(x)$, откуда получаем

$$\frac{x+x+a-c}{2}=\frac{a+b}{2},\quad x=\frac{b+c}{2}=\frac{2016}{2}=1008.$$

Ответ: 1008.

10.2. Вася выписывает последовательность чисел: $a_1=1$, $a_2=1,\ldots$, $a_{n+1}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}$ при $n\geq2$. При этом он заметил, что $a_5>2$, $a_6<2$, $a_7>2$, $a_8<2$ и высказал такую гипотезу: все члены последовательности с нечётными номерами, начиная с номера 5, больше 2, а все члены с чётными номерами, начиная с номера 4, меньше 2. Докажите эту гипотезу.

Решение. Действуем по индукции. База уже указана. Предположим, что для натурального $k\geq 3$ имеем $a_{2k-1}>2,\ \ a_{2k}<2.$ Тогда

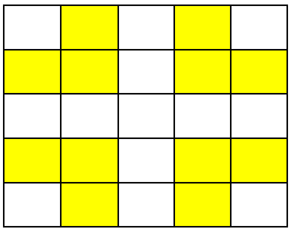
$a_{2k+1}=1+\frac{a_{2k-1}}{a_{2k}}>1+1=2$, так как $a_{2k-1}>2>a_{2k}$,

$a_{2k+2}=1+\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}<1+1=2$ так как $a_{2k}<2<a_{2k+1}$.

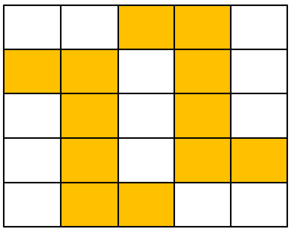
Тем самым индукционный переход от k к $k+1$ выполнен.

10.3. Какое наименьшее число уголков из трёх клеток нужно покрасить в квадрате 5×5 клеток так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя ? Закрашенные уголки не должны перекрываться.

Решение. Отметим четыре уголка следующим образом:



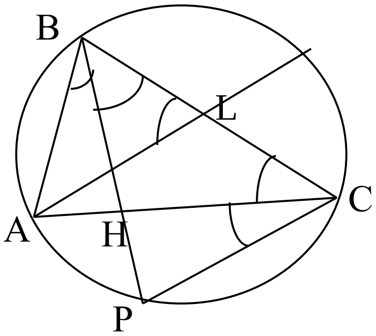
Если закрашено не более трех уголков, то хотя бы один из четырех отмеченных уголков может быть дополнительно покрашен, так как любой (в том числе покрашенный) уголок может иметь общие клетки только с одним из отмеченных уголков. Значит, если выполнено условие задачи, то покрашенных уголков не меньше четырех. Это - оценка. Приведем пример, подтверждающий точность этой оценки:



Ответ: 4.

10.4. Пусть AL - биссектриса остроугольного треугольника ABC, а ω - описанная около него окружность. Обозначим через P точку пересечения продолжения высоты BH треугольника ABC с окружностью ω. Докажите, что если ∠BLA=∠BAC, то BP=CP.

***Решение*.** См. рис.



Докажем, что ∠PBC=∠PCB. Пусть ∠BAC=2α . Тогда ∠ABH= $\frac{\pi}{2}$ -2α (из прямоугольного треугольника AHB). Следовательно, ∠ACP= $\frac{\pi}{2}$ -2α (как вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и угол∠ABH). Угол ∠ALB, равный по условию 2α, - внешний для треугольника ALC, в котором угол LAC равен α. Значит угол $\angle ACB$ равен α (внешний угол равен сумме внутренних, с ним не смежных).

Следовательно, $\angle 2= \frac{\pi}{2}$ -α (из прямоугольного треугольника BHC).Кроме того, $\angle 4+\angle 5=$ $\alpha+ \frac{\pi}{2}$ -2α= $\frac{\pi}{2}$ -α.Этим всё доказано: треугольник BPC - равнобедренный.

10.5. 10.5 A - четырёхзначное число, составленное из ненулевых цифр, B - число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Известно, что сумма A+B делится на 109. Чему может быть равна сумма цифр числа A ?

Решение. Пусть A= $\overline{abcd}$ (a,b,c,d - цифры), т.е. A=1000a +100b +10c +d. Тогда B= 1000d +100c +10b +a и A +B = 1001a +110b +110c +1001d.

В последней сумме выделим по возможности большую часть, заведомо делящуюся на 109:

A+B = (981+20)a + (109+1)b + (109+1)c + (981+20)d = 109(9a+b+c+9d) + +20a +b +c +20d.

Теперь видим, что число A+B делится на 109, только если число h=20a+b+c+20d делится на 109. Число h лежит в границах от $20\cdot1+1+1+20\cdot1=42$ до $20\cdot9+9+9+20\cdot9=378$. В этих границах только три числа делятся на 109. Это 109, 218, 327. Соответственно этому разберем три случая.

1) 20a+b+c +20d =109. 20(a+d)+b+c = 109.

Так как 2≤b+c≤18, то 91≤20(a+d)≤107, откуда получаем для a+d единственную возможность a+d=5. Но тогда b+c=9. Следовательно, в этом случае сумма цифр a +b + c +d=14.

Пример: A=2543, B=3452, A+B=5995=55·109.

2) 20(a+d)+b+c=218. 200≤20(a+d)≤216, a+d=10, b+c=18 (т.е. b=c=9), в этом случае a+b+c+d=28.

Пример: A=3997, B=7993, A+B=11990=110·109.

3) 20(a+d)+b+c=327. 309≤20(a+d)≤325, a+d=16, b+c=7, в этом случае a+b+c+d=23.

Пример: A=7169, B=9617, A+B=16786=154·109.

Ответ: 14, или 23, или 28.