ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2016/2017 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

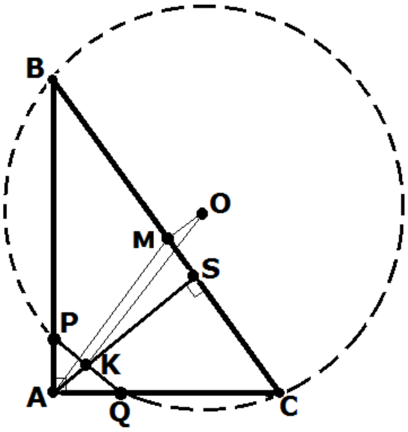
Решения и критерии проверки.

1. **Ответ:** на 8 процентов. **Решение.** Возьмём за 1 плановую производительность труда (объём работы, выполняемый за 1 час). Тогда до удлинения смены рабочие выполняли за смену 6+1,5=7,5 единиц работы. А после удлинения 8+2,1=8,1 единиц. Значит, общая производительность за смену стала составлять 8,1:7,5×100%=108% от исходной, то есть увеличилась на 8%. **Критерии проверки.** Верное решение – 7 баллов. Первоначальная и окончательная производительность за смену верно выражена в условных единицах, но в процентах соотношение выражено неверно – 4 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

2. **Ответ:** 31. **Решение.** В любой арифметической прогрессии $a_5=a_1+4d$, $a_3=a_1+2d\Rightarrow a_3=(a_1+a_5)/2$. Поэтому в третьей клетке первого столбца стоит число 41, в третьей клетке последнего столбца стоит число 21, а в средней клетке второй строки (то есть, в центральной клетке таблицы) стоит число 31. **Критерии проверки.** Верное решение – 7 баллов. Числа в средних клетках указываются без какого-либо обоснования – 3 балла. В остальных случаях (в том числе, один ответ без объяснений) – 0 баллов.

3. **Решение.** Первые три числа в сумме дают ноль. Разобьём оставшийся ряд на четвёрки последовательно идущих чисел. В каждой такой четвёрке сумма равна нулю. Выписывая первые три числа и произвольное количество четвёрок, получаем набор с нулевой суммой, причём таких наборов бесконечно много. **Критерии проверки.** Любой правильный пример с объясннием – 7 баллов. За отсутствие объяснения снимается 2 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

4. **Ответ.** 6 см. **Решение.** Пусть $AB=9$, $BC=4$, $AC=x$, S – площадь треугольника ABC. Тогда высоты треугольника равны $2S/4$, $2S/9$, $2S/x$. В силу неравенства треугольника сторона AC может быть либо наибольшей, либо средней по величине. Применяя неравенство треугольника к треугольнику, составленному из высот, видим, что среди величин $2S/4$, $2S/9$, $2S/x$ величина $2S/x$ тоже может быть либо большей, либо средней. Но, чем больше сторона, тем меньше проведённая к ней высота, и к наибольшей стороне может проводиться только наименьшая высота. Поэтому сторона x (и проведённая к ней высота) могут быть только средними. Это позволяет записать пропорцию $9:x = 2S/4: 2S/x$ и $x=6$. **Критерии проверки.** Полное решение – 7 баллов. Пропорция выписана верно, но не обоснована (тем или иным способом) – 4 балла. В остальных случаях (в том числе, ответ без решения) – 0 баллов.



5. Решение. По условию отрезки AS и OM перпендикулярны гипотенузе и поэтому параллельны между собой. Осталось доказать, что параллельны отрезки OK и AM. Пусть $\angle ACB=\alpha$. Тогда $\angle ABC=90°-\alpha$, $\angle BPQ=180°-\alpha$, $\angle APK=\alpha=\angle SAP$. Аналогично $\angle SAQ=90°-\alpha=\angle AQP$ и AK – медиана, проведённая к стороне PQ. Так как K – середина хорды PQ, а O центр окружности, отрезки OK и PQ перпендикулярны. Далее, так как AM – медиана, проведённая к гипотенузе BC треугольника ABC, $\angle MAC=\alpha$. В то же время $\angle PQA=90°-\alpha$, что и гарантирует перпендикулярность отрезков AM и PQ. Так как отрезки OK и AM перпендикулярны одному отрезку PQ, они параллельны между собой. Доказательство закончено. **Критерии проверки.** Верное решение – 7 баллов. В остальных случаях – 0 баллов.

6. Ответ. Есть три решения (1,2), (4,4) и (3,6). **Решение.** Пусть Дима придумал числа a, b. Если каждое из этих чисел отлично от 1, то их произведение ab больше трёх остальных и не может быть их средним арифметическим. Поэтому возможны два принципиально разных случая: $3a=b+(a+b)+ab$ и $3(a+b)= b+a+ab$. Первое равенство эквивалентно $2(a-b)=ab \Leftrightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$. Ясно, что здесь возможен единственный вариант $b=1$, $a=2$. Второе равенство эквивалентно $2(a+b)=ab \Leftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$. Тогда одна из этих дробей равна либо 1/3, либо 1/4, что даёт два случая: $b=4$, $a=4$ или $b=3$, $a=6$. Наконец, если одно из этих чисел равно 1, имеем набор 1, x, x, $x+1$. Средним в этом наборе может быть только число x, что даёт $3x=2x+2$ и $x=2$. **Критерии проверки.** Верное решение – 7 балов. Схема рассуждений, в целом верна, но содержит логические ошибки, приведшие к потере одного из решений – 4 балла. Все уравнения выписаны, но не решены или решены неправильно – 1 балл. Все решения приведены и проверены, но не доказано отсутствие других решений – 2 балла. Приведены и проверены два решения – 1 балла. В остальных случаях – 0 баллов.