Департамент образования Ярославской области
Всероссийская олимпиада школьников 2016/2017 учебного года

Математика, 10 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

Каждая задача оценивается из 7 баллов в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией по математике.
Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.
Если решения нет, то независимо от продвижения, ставить не более 3 баллов.
Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. Рыбаки поймали несколько карасей и щук. Каждый поймал столько карасей, сколько щук поймали все остальные. Сколько было рыбаков, если всего карасей было поймано в 10 раз больше, чем щук?

Ответ: 11.

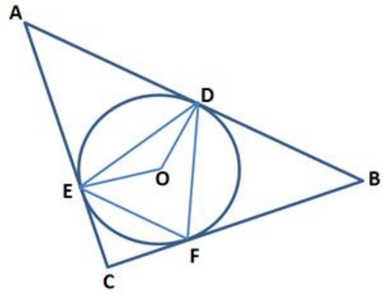
Решение:
Пусть всего рыбаков n. Обозначим количество пойманных карасей за K. Эта сумма равна сумме карасей, пойманных каждым, т.е. равна сумме щук, пойманных всеми рыбаками, учтенных $(n-1)$ раз.

Таким образом, имеем уравнение: $K = 10\dfrac{K}{n-1}$.

Отсюда – ответ.

2. В треугольник вписана окружность. Докажите, что треугольник, образованный точками касания – остроугольный.

Доказательство:
Рассмотрим четырехугольник *ADOE*, образованный двумя радиусами, проведенными в точки касания, и отрезками двух сторон (см. рис.). Сумма двух прямых углов в нем 180°. На долю двух других углов приходится тоже 180°. Значит, угол *EOD* меньше 180°. А вписанный угол *EFD*, опирающийся на ту же дугу, равен его половине, т.е. острый. А это – один из углов треугольника с вершинами в точках касания. С остальными углами – то же самое.



3. Можно ли клетки квадрата 8x8 покрасить в 16 цветов, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющие общую сторону?

Ответ: Нет.

Решение:
Всего различных пар цветов: $16 \cdot 15/2 = 120$. А границ между клетками 112.

4. Пусть $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Сколько квадратов целых чисел среди чисел $p(1), p(2), \ldots, p(2016)$?

Ответ: 32.

Решение:
Заметим, что $p(x) = (x-1)^2\,(2x+1)$.
При целом x ($1 \le x \le 2016$) число $p(x) = (x-1)^2\,(2x+1)$ является квадратом целого или при $x = 1$ ($p(1) = 0$), или (при $x \ge 2$) тогда, когда квадратом целого является число $2x + 1$.
Отметим, что при $x \ge 2$ верно неравенство: $5 \le 2x + 1 \le 4033$, а также что $2x + 1$ нечетно.
Такими квадратами являются числа 9 (при $x = 4$), 25 (при $x = 12$), 49 (при $x = 24$) и т.д. до $63^2 = 3969$ (при $x = 1984$) – то есть, мы рассмотрели квадраты нечётных чисел от 3^2 до 63^2 (всего их 31). Вместе с ранее найденным квадратом при $x = 1$ получаем 32 точных квадрата среди чисел указанного вида.

5. Буквы А, Б, К, М, П, У, Ш закодировали последовательностями нулей и единиц (каждую – своей). Затем в слове ПАПАМАМАБАБУШКА заменили буквы их кодами. Могла ли длина получившейся последовательности оказаться короче 40 символов, если последовательность однозначно раскодируется?

Ответ: Могла.

Решение:
Вот пример таблицы кодов:

А	Б	К	М	П	У	Ш
0	110	1111	100	101	11100	11101

Слово будет выглядеть так:

10101010100010001100110111001110111110 – всего 38 символов. Раскодирование однозначно. Чтобы в этом убедиться, начните с левого края. Самым левым может быть только код 101, т.к. ни один другой код не начинается с такого же сочетания символов. Далее – аналогично, т.к. ни один код не начинается с комбинации символов, совпадающих с каким-либо другим кодом.

Комментарий:
Равномерный код (по 3 символа на букву) дает 45 знаков. Поэтому, необходимо использовать для разных букв коды переменной длины. Чем чаще встречается буква, тем короче должен быть у нее код. Это соображение может помочь при проверке. Будьте внимательны.

Участники могут обосновать однозначность раскодирования не последовательным рассмотрением кодовой последовательности (слева направо), а сославшись на верный факт, относящийся к кодировкам такого вида. Приведенный код является примером так называемого префиксного кода – код любой буквы не является началом кода никакой другой буквы (условие Фано), а для него верна теорема об однозначности раскодирования. Ссылку на соответствующую теорему можно засчитывать как обоснование (естественно, при условии корректной её формулировки).

Указания по проверке:
Оценка – либо 0, если ответ неправильный или таблица кодов не дает нужного результата, либо 4 балла, если коды правильные, но нет обоснования однозначности раскодирования, либо 7 баллов.