**Для педагога**

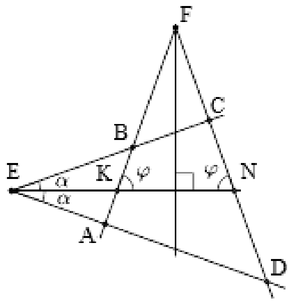
**Всероссийская олимпиада школьников 2016г**
**муниципальный этап**
**Математика**
**11 класс**

Общее время выполнения работы – **3 часа 55 мин (235 мин).**
Максимальное количество баллов – **35.**

**Общие критерии оценки:**
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

**Задание 1**
Существуют ли целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению
$2x^2 - 5y^2 = 7$
**Количество баллов 7**
**Ответ:**
нет
**Решение**
(основано на свойствах делимости).
Число 7 – простое нечетное число, являющееся разностью двух чисел, поэтому эти числа разной четности, но $2x^2$ – четное, тогда $5y^2$ – нечетное.
$5y^2$ - нечетное, 5 – нечетное $\Rightarrow$ $y^2$ – нечетное $\Rightarrow$ y – нечетное $\Rightarrow$ $y = 2m + 1$
$y^2 = 4m^2 + 4m + 1$, тогда $5y^2 = 20m^2 + 20m + 5$, подставим это в уравнение.
Получим $2x^2 - 20m^2 - 20m - 5 = 7 \Rightarrow x^2 - 10m^2 - 10m = 6$.
Так как $10m^2, 10m$ - четные, и разность $x^2 - 10m^2 - 10m = 6$ тоже четное, то $x^2$ – четное число $\Rightarrow x = 2n \Rightarrow x^2 = 4n^2$.
Тогда получим уравнение $4n^2 - 10m^2 - 10m = 6 \Rightarrow 2n^2 - 5m^2 - 5m = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2n^2 - 5m(m+1) = 3$
$2n^2$ - четное
$m(m+1)$ - четное, как произведение последовательных целых чисел, но тогда $2n^2 - 5m(m+1)$ – четное $\Rightarrow 2n^2 - 5m(m+1) \neq 3$ ни при каких целых m и n $\Rightarrow 2x^2 - 5y^2 = 7$ решений в целых числах не имеет.

**Задание 2**
Дан четырехугольник ABCD. Прямые DA и CB пересекаются в точке E, а прямые AB и DC – в точке F. Известно, что биссектрисы углов BEA и BFC перпендикулярны. Докажите, что вокруг ABCD можно описать окружность.
**Количество баллов 7**
**Решение**




Пусть K и N – точки пересечения биссектрисы угла AEB и прямых AF и DF. В треугольнике KFN биссектриса является высотой. Поэтому этот треугольник равнобедренный. Обозначим $\angle FKN = \angle FNK = \varphi$. Пусть также $\angle BEK = \angle AEK = \alpha$. Угол DAB – внешний для треугольника EAK , он равен сумме двух внутренних углов этого треугольника:
$\angle DAB = \angle AEK + \angle EKA = \angle AEK + \angle BKN = \alpha + \varphi$.
С другой стороны,
$\angle DCB = \angle NCE = 180^\circ - \angle NEC - \angle ENC = 180^\circ - \alpha - \varphi$.
Сложив полученные равенства, получим $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$. Отсюда следует, что ABCD – вписанный четырехугольник.

**Задание 3**
Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов $x^{2016} + 2016x – 1$ и $x^{2016} – 2016x + 1$.
**Количество баллов 7**
**Ответ:**
у первого многочлена наименьший положительный корень меньше
**Решение 1**
Пусть $x_1 > 0$ – корень уравнения $x^{2016} + 2016x - 1 = 0$,
а $x_2 > 0$ – корень уравнения $x^{2016} - 2016x + 1 = 0$.
Тогда
$$x_1^{2016} + 2016x_1 - 1 = 0$$
$$x_2^{2016} - 2016x_2 + 1 = 0$$
Складывая эти равенства почленно, получаем:
$$x_1^{2016} + x_2^{2016} + 2016(x_1 - x_2) = 0$$
Значит
$$x_1 - x_2 = -\frac{x_1^{2016} + x_2^{2016}}{2016} < 0$$
Таким образом, $x_1 < x_2$.
**Решение 2**
Функция $x^{2016}$ принимает только положительные, а функция $2016x – 1$ – только отрицательные значения на интервале $(0, {}^1/_{2016})$. Значит, уравнение $x^{2016} = 2016x – 1$ и многочлен $x^{2016} – 2016x + 1$ не имеют корней на этом интервале. Многочлен $x^{2016} + 2016x – 1$ принимает в концах отрезка $[0, {}^1/_{2016}]$ значения разных знаков и, следовательно, имеет корень на интервале $(0, {}^1/_{2016})$.

**Задание 4**

Доказать, что $(\sqrt{5}-2)^{2016}=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$, где m – целое число.

**Количество баллов 7**

**Решение**

Заметим, что:

$(\sqrt{5}-2)^{2016}=a\sqrt{5}+b$,

где a и b – некоторые целые числа разных знаков. Далее можно заметить, что:

$(\sqrt{5}+2)^{2016}=a\sqrt{5}-b$

Перемножим эти два равенства:

$(\sqrt{5}-2)^{2016}(\sqrt{5}+2)^{2016}=(a\sqrt{5}+b)(a\sqrt{5}-b)$

Или:

$1=5a^2-b^2$

С другой стороны в соответствии с нашим обозначением можно записать:

$(\sqrt{5}-2)^{2016}=\pm\left(\sqrt{5a^2}-\sqrt{b^2}\right)$

Отсюда и следует требуемое утверждение.

**Замечание**

Утверждение задачи может быть также доказано методом математической индукции по показателю степени.

**Задание 5**

Построим из рациональных чисел $r = a/q$ ($a$ – целое, $q$ – натуральное) математический лабиринт по следующим правилам:

1) любое рациональное число $r$ – комната лабиринта;

2) две комнаты $r$ и $s$ соединены проходом, если $r\cdot s = 1$ или разность $(r - s)$ – целое число.

Доказать, что в этом лабиринте для любых двух комнат существует путь, соединяющий их (можно перейти из одной комнаты в любую другую по проходам).

**Количество баллов 7**

**Решение**

Сначала докажем, что любую рациональную точку $r=a/q_0\neq 0$ можно соединить с нулем некоторым путем. Разделив целое $a$ на натуральное $q_0$ с остатком, получим

$a=q_0b+q_1$ с $0\le q_1<q_0$.

Здесь $q_1$ - остаток от деления. При этом для $r_1=q_1/q_0$ разность $r-r_1=\frac{a}{q_0}-\frac{q_1}{q_0}=b$ - целое число, поэтому $r$ и $r_1$ соединены проходом. Если $r_1=0$ ($a$ делится на $q_0$), то получим путь из r в 0. Пусть теперь $r_1\neq 0$. Тогда $q_1\neq 0$ и для $r_2=q_0/q_1$ выполняется равенство $r_1r_2=1$. Следовательно,

$$r=\frac{a}{q_0}\to r_1=\frac{q_1}{q_0}\to r_2=\frac{q_0}{q_1}$$

- путь из $r$ в $r_2$. Напомним, что при этом $0\le q_1<q_0$. Повторяя это рассуждение с $r_2$ вместо $r$ и так далее, в конце концов попадем в ноль, поскольку знаменатели получающихся дробей на каждом шаге уменьшаются. Для произвольных ненулевых рациональных $r$ и $r'$ (по доказанному) найдутся пути

$$r\to r_1\to\ldots\to r_v\to 0$$

$$r'\to r_1'\to\ldots\to r_t'\to 0$$

Обращая стрелки во втором, получим путь

$$r\to r_1\to\ldots\to r_v\to 0\to r_t'\to\ldots\to r_1'\to r'$$

из $r$ в $r'$. Утверждение полностью доказано.