

11 класс

Задача 1. Известно, что для некоторых натуральных чисел a, b число a^4+a^3+1 нацело делится на $a^2b^2+ab^2+1$. Найдите, чему равна разность $a-b$.

Ответ: $a-b = 0$. **Решение.** Пусть $a^4+a^3+1 = k(a^2b^2+ab^2+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $a^2(a^2-kb^2)+a(a^2-kb^2) = a(a+1)(a^2-kb^2) = k-1 \geq 0$. Если $k = 1$, то $a^2-kb^2 = 0$, $a^2 = b^2$, $a=b$, $a-b = 0$. Если $k > 1$, то с одной стороны $a^2-kb^2 \geq 1$, $a^2 > kb^2 > k$. С другой стороны, $k \geq a(a+1) > a^2$. Противоречие.

Задача 2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. За одну операцию его можно заменить либо трёхчленом $2x + 1^2 \cdot f \frac{1}{2x+1}$, либо трёхчленом $3x - 1^2 \cdot f \frac{1}{3x-1}$. Можно ли такими операциями получить из трёхчлена $x^2 - 2017x + 2016$ трёхчлен $x^2 - 2016x + 2017$?

Решение. Нет, так как указанные преобразования не меняют дискриминант квадратного трёхчлена, а у данных трёхчленов дискриминанты различны.

Задача 3. Внутри квадрата со стороной 1 расположены несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что существует прямая, пересекающая хотя бы 4 из этих окружностей.

Решение. Спроектируем данные окружности на одну сторону квадрата. Проекция каждой окружности - отрезок, длина которого равна диаметру этой окружности. Поскольку сумма диаметров окружностей равна $\frac{10}{\pi}$ и $\frac{10}{\pi} > 3$, то сумма длин проекций всех окружностей больше 3. Длина стороны квадрата равна 1, поэтому хотя бы одна точка этой стороны покрывается не меньше чем четырьмя проекциями окружностей. Перпендикуляр, восстановленный в этой точке, пересекает 4 окружности, т.е. принадлежит искомой прямой.

Задача 4 . (Н. Агаханов) Основания трех высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан противоположных граней. Докажите, что все рёбра пирамиды равны.

Решение. Пусть BB_1 и CC_1 — две высоты пирамиды $DABC$. По условию B_1 принадлежит медиане CM треугольника ACD , а C_1 медиане BM треугольника ABD где M — середина AD . Из определения высоты пирамиды следует, что

BB_1 перпендикулярно AD , CC_1 перпендикулярно AD . Значит AD перпендикулярно плоскости BMC , которая содержит пересекающиеся прямые BB_1 и CC_1 . Тогда BM – медиана и высота треугольника ABD . Отсюда следует, что $AB=BD$. Аналогично, из треугольника ACD получаем $AC = CD$. Рассматривая другие пары высот, приходим к утверждению задачи.

Задача 5. (И. Богданов) На острове живут 2016 человек, каждый - либо рыцарь, либо лжец, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Некоторые из жителей знакомы (если A знаком с B , то B знаком с A). Каждый житель острова, кроме президента, сделал два утверждения: «Я знаю чётное число рыцарей» и «Я знаю нечётное число лжецов». Докажите, что президент должен сделать такие же утверждения. (Президент входит в число жителей острова.)

Решение.

Лемма. Пусть в некоторой компании каждый человек из этой компании записал, сколько у него знакомых в этой компании. Тогда количество записанных нечётных чисел чётно.

Доказательство. Рассмотрим количество упорядоченных пар (A, B) знакомых в этой компании. Оно чётно, так как с парой (A, B) присутствует и пара (B, A) . С другой стороны, оно равно сумме всех записанных чисел, так как количество пар вида (A, x) равно числу, записанному A .

Рассмотрим любого человека, отличного от президента. Если он лжец, то у него чётное число знакомых лжецов и нечётное число знакомых рыцарей. Если он рыцарь, то наоборот - нечётное число знакомых лжецов и чётное число знакомых рыцарей. В любом случае, у него нечётное число знакомых. Тогда и у президента также нечётное число знакомых.

Пусть президент – рыцарь. Применим к компании из всех рыцарей лемму. Так как у каждого другого рыцаря было чётное число знакомых рыцарей, получаем, что у президента тоже чётное число знакомых рыцарей, а значит, нечётное число знакомых лжецов, и утверждение задачи доказано.

Если президент – лжец, то примените лемму ко множеству всех лжецов.