

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**  
**Муниципальный этап**

**Решения задач**

**11 класс**

1. Пусть  $S$  – путь, который проехал Незнайка,  $T$  – полное время, за которое он проехал весь путь. Из условия следует, что Незнайка ехал со скоростью 50 км/час не больше половины времени. Отсюда  $\frac{S}{100} \leq \frac{T}{2}$ , то есть

$$S \leq 50 T.$$

Ещё из условия следует, что со скоростью 60 км/час Незнайка ехал не больше половины пути. То есть  $60 \cdot \frac{T}{2} \leq \frac{S}{2}$  и

$$60 T \leq S.$$

Из этих неравенств получаем

$$60 T \leq 50 T,$$

что невозможно, так как  $T > 0$ .

Ответ: Незнайка ошибается.

2. Пусть  $ab > a + b$ . Поделив на  $b$ , получим

$$a > \frac{a}{b} + 1,$$

а поделив на  $a$ , получим

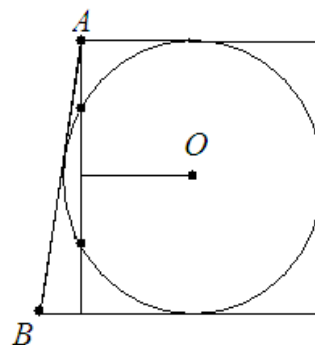
$$b > \frac{b}{a} + 1.$$

Складывая, приходим к оценке

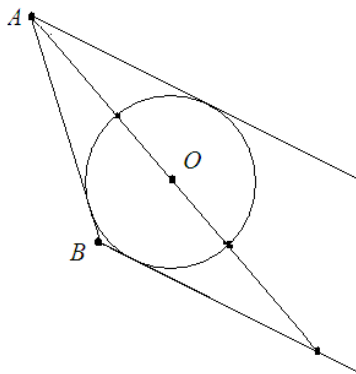
$$a + b > \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2.$$

Но для положительных чисел  $a$  и  $b$  выполнено неравенство  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ , откуда и получаем требуемый результат.

3. а) Предположим, что указанный отрезок является высотой. Тогда центр вписанной окружности лежит на серединном перпендикуляре к высоте, а радиус вписанной окружности равен половине высоты. Получается, что одна из касательных, проведённых из вершины, параллельна основанию. Треугольник не образуется: в треугольнике не может быть параллельных сторон.



б) Предположим, что указанный отрезок является биссектрисой. Биссектриса проходит через центр вписанной окружности. Из условия следует, что касательная к вписанной окружности, которая содержит основание треугольника, симметрична прямой, содержащей одну из боковых сторон относительно центра вписанной окружности. Поэтому эти две стороны лежат на параллельных прямых. Вновь треугольник не образуется, так как прямые, которые должны содержать две его стороны, параллельны.



Ответ: а) Нет, б) Нет.

4. Преобразуем уравнение к виду

$$x^2 - 2x \sin x + \sin^2 x = \sin^2 x + 2 \cos x - 2$$

$$(x - \sin x)^2 = -\cos^2 x + 2 \cos x - 1$$

и в итоге

$$(x - \sin x)^2 = -(\cos x - 1)^2.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x - \sin x = 0 \\ \cos x - 1 = 0 \end{cases}.$$

Из второго уравнения  $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . При таких значениях  $x$  выполняется  $\sin x = 0$ . Следовательно, первое уравнение может выполняться только при  $x = 0$ .

Ответ: 0.

5. Будем называть центральной клеткой Т-тетрамино клетку, к которой примыкают все остальные. Для того, чтобы Т-тетрамино накрыло Машин прямоугольник, необходимо, чтобы его длинная планка целиком легла на этот прямоугольник. При этом центральная клетка Т-тетрамино ложится на центральную клетку Машиного прямоугольника. Если Т-тетрамино накрывает Вовин прямоугольник, центральная клетка Т-тетрамино является одной из двух накрывающих клеток. Центральные клетки Машиных прямоугольников могут занять любое из 60 положений (мы должны исключить четыре угловых клетки доски). Маша заняла 21 из этих 60 клеток. Вовины прямоугольники занимают 44 клетки, из них 4 могут оказаться угловыми, остальные 40 – не угловые. По принципу Дирихле найдётся не угловая клетка, накрытая центральной клеткой Машиного прямоугольника и одной из клеток Вовиноного прямоугольника. Назовём такие два прямоугольника выделенными. Положим Т-тетрамино так, чтобы его перекладина легла на выделенный Машин прямоугольник, и одна из трёх нецентральных клеток Т-тетрамино накрывала оставшуюся клетку выделенного Вовиноного прямоугольника. Задача решена.