УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

11 класс

1. Существуют ли целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ такие, что $a_1+a_2^2+\ldots+a_{2016}^{2016}=20152016$ и $a_1^3+a_2^4+\ldots+a_{2016}^{2018}=20162017$

Составитель Трунов К.В.

2. В центре детского творчества имеется 32 кружка. Известно, что в каждый кружок ходит 6 детей, причем в любые два кружка суммарно ходит 13 детей. Сколько всего детей посещает центр детского творчества.

Составитель Трунов К.В.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \cos x = \sqrt{2} \\ x \cdot \cos x + y \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{8} \end{cases}$$

Составитель Трунов К.В.

4. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$, - геометрическая прогрессия, а последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_{2016}$ - арифметическая прогрессия. Известно, что среди всех квадратных трехчленов $P_i(x)=x^2+a_i x+b_i$, $i=1,\ldots,2016$ только один квадратный трехчлен $P_k(x)$ имеет действительные корни. Найдите все возможные значения k.

Составитель Трунов К.В.

5. Найдите высоту пирамиды, если разрезав ее только по боковым ребрам и разогнув боковые грани на плоскость основания, вне его, получили квадрат со стороной 18. Если такой квадрат получить невозможно, обоснуйте это.

Составитель Луценко В.И.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

11 класс

1. Существуют ли целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ такие, что $a_1+a_2^2+\ldots+a_{2016}^{2016}=20152016$ и $a_1^3+a_2^4+\ldots+a_{2016}^{2018}=20162017$

Ответ: не существуют

Решение: Рассмотрим разность $a_1^3+a_2^4+\ldots+a_{2016}^{2018}-(a_1+a_2^2+\ldots+a_{2016}^{2016})=a_1(a_1-1)(a_1+1)+a_2^2(a_2-1)(a_2+1)+\ldots+a_{2016}^{2016}(a_{2016}-1)(a_{2016}+1)$. Каждое слагаемое содержит произведение трех подряд идущих целых чисел, значит каждое слагаемое будет делится на 3, а следовательно и вся сумма будет делится на 3. Но данная сумма равна числу 20162017-20152016=10001, которое не делится на 3 (1+0+0+0+1=2).

Рекомендации по проверке.

Только ответ – 0 баллов.

Доказано, что $a_1^3+a_2^4+\ldots+a_{2016}^{2018}-(a_1+a_2^2+\ldots+a_{2016}^{2016})\vdots 3$ - не менее 5 баллов.

2. В центре детского творчества имеется 32 кружка. Известно, что в каждый кружок ходит 6 детей, причем в любые два кружка суммарно ходит 13 детей. Сколько всего детей посещает центр детского творчества.

Ответ: Решений нет.

Решение (Задача на внимательность): Так как в каждый кружок ходит по шесть детей, то суммарно в два кружка ходит не более 12 человек, а по условию задачи их 13. Значит, такого быть не может.

Рекомендации по проверке.
Только ответ – 0 баллов.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x\cdot\cos y+\cos x=\sqrt{2} \\ x\cdot\cos x+y\cdot\sin y=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8} \end{cases}$$

Ответ: $\boldsymbol{x}=\dfrac{\pi}{4}$, $\boldsymbol{y}=2\pi k,\ k\in Z$

Решение: Рассмотрим первое уравнение системы

$\sin x\cdot\cos y+\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{1+\cos^2 y}\,\sin(x+\varphi)=\sqrt{2}$, где $\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{\cos y}{\sqrt{1+\cos^2 y}} \\ \sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2 y}} \end{cases}$

так как $1\le 1+\cos^2 y\le 2$, $-1\le\sin(x+\varphi)\le 1$, то

$$\sqrt{1+\cos^2 y}\,\sin(x+\varphi)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{1+\cos^2 y}=\sqrt{2} \\ \sin(x+\varphi)=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \cos^2 y=1 \\ \sin(x+\varphi)=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \sin y=0 \\ \sin(x+\varphi)=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases} y=\pi n,\ n\in Z \\ \sin(x+\varphi)=1 \end{cases}$. Значит, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ при четных n и $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$ при нечетных n. Тогда получаем, что $\begin{cases} y=2\pi k,\ k\in Z \\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z \end{cases}$ или $\begin{cases} y=\pi+2\pi l,\ l\in Z \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi p,\ p\in Z \end{cases}$. Подставим полученные значения во второе уравнение системы, и выберем только те решения, которые ему удовлетворяют. Второе уравнение системы в первом случае примет вид:

$$\left(\frac{\pi}{4}+2\pi m\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi m\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}+2\pi m=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow m=0.$$

Во втором:

$$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi p\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi p\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}+2\pi p=\frac{\pi}{4}-\textit{нет решений.}$$

Рекомендации по проверке.
Решено первое уравнение, но не выбраны решения, удовлетворяющие второму уравнению – 4 балла.

4. Последовательность чисел $a_1,a_2,,\ldots,a_{2016}$, - геометрическая прогрессия, а последовательность $b_1,b_2,,\ldots,b_{2016}$ - арифметическая прогрессия. Известно, что среди всех квадратных трехчленов $P_i(x)=x^2+a_ix+b_i$, $i=1,\ldots,2016$ только один квадратный трехчлен $P_k(x)$ имеет действительные корни. Найдите все возможные значения k.

Решение: Если $a_1=3,a_2=1,,\ldots,a_{2016}=\frac{1}{3^{2016}}$, $b_1=1,b_2=2,,\ldots,b_{2016}=2016$, то $k=1$. Если $a_1=\frac{1}{3^{2016}}$, $a_2=\frac{1}{3^{2015}},,\ldots$, $a_{2015}=1$, $a_{2016}=3$, $b_1=2016,b_2=2015,,\ldots,b_{2015}=2$, $b_{2016}=1$, то $k=2016$.

Пусть теперь $1<k<2016$. Тогда квадратный трехчлен $P_k(x)$ имеет действительные корни (то есть $D_k=a_k^2-4b_k\geq 0$) , а остальные не имеют. Рассмотрим квадратные трехчлены $P_{k-1}(x)$ и $P_{k+1}(x)$.
$D_{k-1}=a_{k-1}^2-4b_{k-1}<0$ и $D_{k+1}=a_{k+1}^2-4b_{k+1}<0$. Тогда с одной стороны $D_{k-1}+D_{k+1}<0$, а с другой
$D_{k-1}+D_{k+1}=a_{k-1}^2+a_{k+1}^2-4(b_{k-1}+b_{k+1})\geq 2a_{k-1}a_{k+1}-4(b_{k-1}+b_{k+1})$ (используем $a_{k-1}^2+a_{k+1}^2\geq 2a_{k-1}a_{k+1}$). А так $a_1,a_2,,\ldots,a_{2016}$, - геометрическая прогрессия, то $a_k^2=a_{k-1}a_{k+1}$, а последовательность $b_1,b_2,,\ldots,b_{2016}$ - арифметическая прогрессия, то $b_k=\frac{b_{k-1}+b_{k+1}}{2}$. Получаем , что $D_{k-1}+D_{k+1}\geq 2a_k^2-8b_k=2D_k\geq 0$ - противоречие. Следовательно, $к$ может принимать только значения равные 1 и 2016.

Ответ: 1; 2016

Рекомендации по проверке.

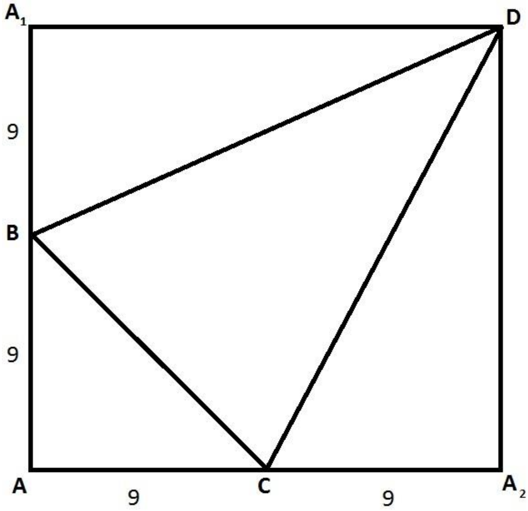
При правильном решении для значений $k=1$ и $k=2016$ не приведены примеры последовательностей – 5 баллов.

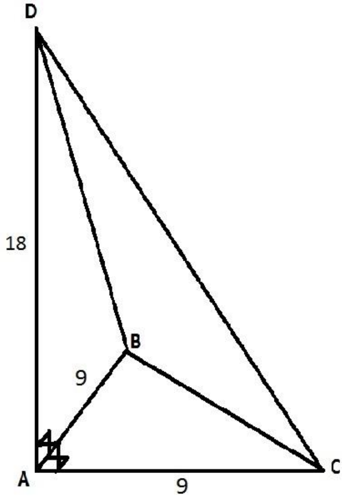
Указаны только значения $k=1$ и $k=2016$, без примеров последовательностей – 0 баллов.

Указаны только значения $k=1$ и $k=2016$ с примерами последовательностей – 2 балла.

5. Найдите высоту пирамиды, если разрезав ее только по боковым ребрам и разогнув боковые грани на плоскость основания, вне его, получили квадрат со стороной 18. Если такой квадрат получить невозможно, обоснуйте это.

Решение:





На рисунке представлена такая развертка. Если перевернуть пирамиду и поставить на грань *ABC*, то легко подсчитать объем пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 18 = 3^5$. Определим площадь основания *BDC* как разность площадей квадрата и трех треугольников. $18^2 - \frac{1}{2}(9 \cdot 9 + 9 \cdot 18 + 9 \cdot 18) = \frac{3^5}{2}$

Определим объем пирамиды двумя способами. $V = \frac{1}{3}\text{Н} \cdot \frac{3^5}{2} = 3^5$, где Н-искомая высота пирамиды. Из равенства находим, что Н=6.

Ответ: 6

Рекомендации по проверке.

Правильно нарисована развертка пирамиды – 4 балла.