11 класс

1. Ответ. 2; 3; 5.

Решение. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$p < q < r.$$

Если $p \geq 3$, то $pq + qr + rp < 3qr \leq pqr.$

Последнее неравенство противоречит данному неравенству. Поэтому $p < 3$, то есть $p = 2.$

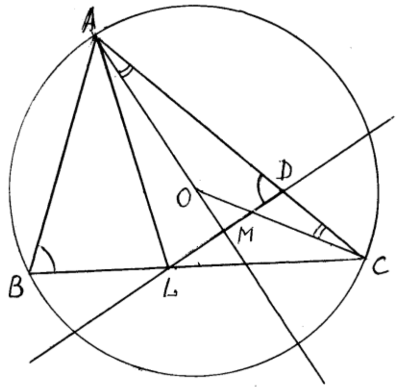
Тогда из неравенства $pqr < pq + qr + rp$ будем иметь $2qr < 2q + qr + 2r,$ то есть $qr < 2q + 2r.$ Учитывая, что $q < r$, получим $qr < 2q + 2r < 4r,$ откуда получим $q < 4,$ то есть q=3. Наконец, для нахождения r получаем неравенство $6r < 6 + 3r + 2r,$ то есть $r < 6,$ откуда получаем $r = 5.$

2. Ответ. 29.

Решение. Поскольку однозначные числа не имеют общих цифр, то $n > 9$. А так как числа, соседние с числом 9, должны содержать девятку в своей записи, то меньшее из них не может быть меньше, чем 19, а большее - меньше, чем 29. Следовательно, $n \geq 29$.

Равенство $n = 29$ возможно, поскольку условию задачи удовлетворяет, например, такой порядок расстановки чисел от 1 до 29 по кругу: 1, 11, 10, 20, 21, 12, 2, 22, 23, 3, 13, 14, 4, 24, 25, 5, 15, 16, 6, 26, 27, 7, 17, 18, 8, 28, 29, 9, 19.

3. Решение.



Пусть $\angle ABC=\beta$, тогда $\angle AOC=2\beta$ как центральный угол, опирающийся на ту же дугу AC. Так как треугольник ACO – равнобедренный, то $\angle OAC=90^{\circ}-\beta$. Далее, треугольники ABL и ADL равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle ADL=\beta$. Пусть M – точка пересечения прямых AO и LD. Тогда $\angle MAD+\angle MDA=90^{\circ}$, откуда следует, что треугольник AML – прямоугольный.

4. Ответ. a=2.

Решение. Заметим, что если (x_o, y_o) - решение системы, то $(-x_o, y_o)$ также является ее решением. Поэтому условие x=0 – необходимое (но не достаточное) для существования единственного решения.

Положим x=0, тогда

$$\begin{cases} a = y+1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Из полученной системы получаем два возможных значения параметра: a=0 или a=2.

Проверим, удовлетворяют ли найденные значения параметра a условию задачи.

При a=0 получаем

$$\begin{cases} y+\cos x = 0, \\ \sin^2 x + y^2 = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} y = -\cos x, \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечно много решений. Следовательно, a=0 не удовлетворяет условию задачи.

При a=2 получим

$$\begin{cases} 2(|x|+1) = y+\cos x, \\ \sin^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $|y| \le 1$. При этом условии для правой части первого уравнения системы справедливо неравенство $y+\cos x \le 2$. В то же время очевидно $2(|x|+1) \ge 2$. Таким образом, если система имеет решение, то одновременно должны выполняться равенства $y+\cos x = 2$ и $2(|x|+1) = 2$. Отсюда получаем x=0 и y =1. Проверка показывает, что пара (0; 1) – является решением системы, и в силу доказанного единственное. Следовательно, a=2 является решением задачи.

5. Решение. Пусть A_1, …, A_k - богатыри из некоторого города N. Предположим, что кубки обошли полный круг. Тогда у каждого из богатырей A_i побывал каждый из золотых кубков. Следовательно, они держали золотые кубки в руках $n \cdot k$ раз. Так как $1 < n < 13$, то $n \cdot k \ne 13$.

Если $n \cdot k > 13$, то в какой-то момент у богатырей из города N было 2 золотых кубка одновременно, и в этом случае все доказано.

Если окажется $n \cdot k < 13$, то тогда в некоторый момент у богатырей из города N не было ни одного золотого кубка. Поскольку число золотых кубков равно числу городов, то в этот момент 2 золотых кубка были у богатырей какого-то другого города M, что и требовалось.

Критерии оценивания и организация проверки работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, оцениваются частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство леммы, нахождение примера и т.п.). Таким образом, при подсчете окончательных баллов по задаче жюри учитывает все перечисленные случаи, а также возможные логические и арифметические ошибки в решениях.

Проверка работ на математической олимпиаде проводится в два этапа. На первом этапе жюри производит проверку работ без выставления баллов, по так называемой системе «в плюсах и минусах». Знак выставляется в соответствии с приведенной ниже таблицей. При этом предварительная оценка по системе «плюс-минус» может быть незначительно изменена после обсуждения критериев и классификации случаев.

Знак	**Правильность решения**
+	Полное верное решение
+.	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
±	Решение в целом верное. Однако решение содержит существенные ошибки либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений
+/2	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка
∓	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
−.	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения
−	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

Иногда выставляется оценка «+!», чтобы отметить правильное красивое решение.

По окончании первого этапа проверки группа проверяющих по каждой задаче, анализируя и обобщая приведенные решения, выделяет различные способы решения, типичные частичные продвижения, основные ошибки. В соответствии со сравнительным анализом различных продвижений вырабатывается шкала критериев оценивания.

На втором этапе выставляются окончательные баллы по каждой задаче. В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается в 7 баллов. В таблице приведена шкала перевода знаков в баллы.

Знак	+	+.	±	+/2	∓	−.	−	0
Баллы	7	6-7	5-6	4	2-3	0-1	0	0

Максимальный балл за выполнение всех заданий – 35.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Баллы не снимаются за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, оценивается в 0 баллов.

Традиционной ошибкой школьников при решении задач на доказательство является использование доказываемого утверждения в качестве начального условия или основы доказательства. Например, в задаче требуется доказать, что треугольник является равнобедренным, а доказательство начинается со слов: «Пусть треугольник ABC − равнобедренный». Подобные «решения» оцениваются в 0 баллов в силу грубой логической ошибки.

Каждая работа оценивается и проверяется (перепроверяется) не менее чем двумя членами жюри.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели.