

6 класс

1. Можно ли на 4-х карточках написать 4 натуральных числа таких, что при увеличении каждого на 1 их произведение увеличится в 3 раза?

Ответ: Можно.

Решение. Были числа 2,3,4,5. Стали 3,4,5,6.
Произведение увеличилось в 3 раза.

Критерии проверки.

Правильный ответ без обоснования: 0 баллов.

Правильный пример: 7 баллов.

2. На острове Логики живут 40 рыцарей (всегда говорящих правду), 25 лжецов (всегда говорящих неправду) и несколько софистов. Софист может произносить только такие фразы, которые на его месте не смогли бы сказать ни рыцарь, ни лжец. Например, стоя рядом со лжецом, софист может сказать фразу «Мы оба лжецы» (потому что, если бы он был рыцарем, то такая фраза была бы ложью, а если бы он был лжецом, она была бы истиной). Однажды софист произнёс два утверждения о жителях острова: 1. "На острове живут ровно ...рыцарей." 2. На острове живут ровно ... лжецов." Восстановить оба утверждения софиста.

Ответ: 1) "На острове живут ровно 40 рыцарей";

2) "На острове живут ровно 26 лжецов."

Решение. 1) Если бы софист был лжецом, он должен сказать правду и тогда он скажет, что рыцарей 40. А если бы он был рыцарем, то рыцарей будет 41, и он сказал неправду.

2) Если бы софист был лжецом, он должен сказать правду, и тогда он скажет, что лжецов $25+1=26$. А если бы он был рыцарем, то лжецов будет 25, и он сказал неправду.

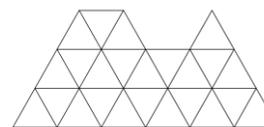
Критерии проверки.

Правильно указано утверждение про рыцарей без обоснования: 1 балл.

Правильно указано утверждение про лжецов без обоснования: 2 балла.

За обоснование каждого из утверждений добавляется по 2 балла.

3. Разрезать фигуру, составленную из равных правильных треугольников, на две равные части (см. рис. справа).



Решение
показано на
рисунке.

Полученны
е фигуры
равны, так
как состоят



из треугольников со стороной 3 и трапеций, состоящих из трех маленьких треугольников. И их можно совместить наложением. Более точно: одна из фигур совмещается с другой поворотом на 120° вокруг верхней точки разреза.

Критерии проверки.

Правильное разрезание без обоснования равенства фигур: 6 баллов.

Любой не правильный пример: 0 баллов

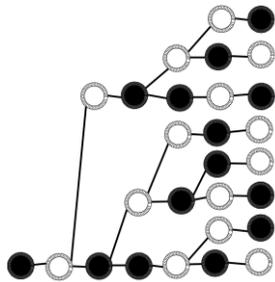
4. Вася должен посадить в ряд 7 деревьев. Каждое посаженное дерево - это берёза или дуб. Посадка должна удовлетворять условию: рядом с каждым деревом одного вида должно быть дерево другого вида. Сколькими различными способами Вася может выполнить посадку? Два способа различны, если найдётся место, где растут деревья разных видов.

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что, поменяв вид каждого посаженного дерева на другой, мы получаем ещё один способ. Два таких способа назовём дополнительными. Таким образом, достаточно посчитать число таких пар дополнительных способов. Какое дерево сажать крайним полностью определяется его соседом. Поэтому достаточно определить число способов посадить 5 центральных деревьев (без двух крайних). Одного вида можно посадить только два дерева подряд (пара). Таких пар может быть максимум две ($3 \times 2 = 6 > 5$), и вместе с пятым деревом они определяют 3 способа в зависимости от положения пятого в центре или на краю. Одна такая пара имеет четыре возможных положения. Получаем ещё 4 способа. И пар одного вида нет. Последний способ. Всего 8 способов. Но их количество нужно удвоить, и ответ 16 способов.

Другое решение.

Будем изображать деревья одного типа тёмными кружочками, а другого - светлыми кружочками. И начнём строить дерево способов посадки, начиная с чёрного кружочка. См. рис.



Ясно, что получилось 8 способов. Но это число нужно удвоить, так как на место чёрных кружков можно сажать берёзы, а белых - дубы, и наоборот.

Критерии проверки.

Указаны 3 - 7 способов посадки: 1 балл .

Указаны 8 - 11 способов посадки: 2 балла.

Указаны 12 - 15 способов посадки: 3 балла.

Указаны все способы, но не объяснено, что других способов нет: 5 баллов.

5. У Пети есть 8 белых кубиков $1 \times 1 \times 1$. Он хочет сложить из них куб $2 \times 2 \times 2$, полностью снаружи белый.

Какое наименьшее число граней кубиков должен закрасить Вася, чтобы помешать Пете?

Ответ: 2.

Решение. Достаточно закрасить две противоположные грани одного кубика. Одной закрашенной грани не хватит: Петя "спрячет" её внутрь.

Критерии проверки.

Только ответ : 0 баллов.

Указан правильный пример раскраски двух граней: 6 баллов.

Показано, что одной закрашенной грани не хватит: 1 балл.