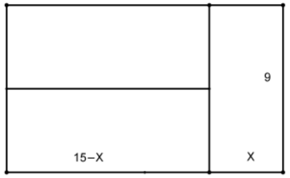
LXIII Всероссийская олимпиада школьников по математике

7 класс

1. Существует ли натуральное число такое, что после его увеличения на 18 сумма егоцифр уменьшится на 18?



Ответ: может.

Решение. Подходит, например, число 982. 982+18=1000.

Критерии проверки.

Только ответ : 0 баллов.

Указан правильный пример: 7 баллов.

2. Барон Мюнхгаузен утверждает, что прямоугольник 15см×9см можно четырьмя различными способами разрезать на три прямоугольника равного периметра. Прав ли барон? Способы считаются различными, если прямоугольники, на которые разрезали, имеют разные периметры.

Ответ: прав.

Решение.1) Можно разрезать прямоугольник на три

равных двумя прямыми, параллельными меньшей стороне (см. рис.). В этом случае периметр будет равен 2×9+2×15/3=18+10=28.

2) Можно разрезать прямоугольник на три равных двумя прямыми, параллельными большей стороне (см. рис.). В этом случае периметр будет равен 2×15+2×9/3=30+6=36.

3) Можно отрезать прямоугольник разрезом вдоль большей стороны, а оставшийся прямоугольник перпендикулярным разрезом разбить на два равных.

С помощью уравнения найдём меньшую сторону длинного прямоугольника:

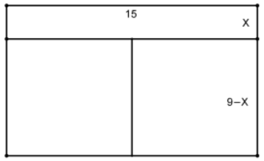
$2(9–x)+2×15/2=15×2+2x$;

$18–2x+15=30+2x$;

$4x=3$; $x=0,75$.

Периметр равен 30+2×0,75=31,5.

4) Можно отрезать прямоугольник разрезом вдоль меньшей стороны,



а оставшийся прямоугольник перпендикулярным разрезом разбить на два равных.

С помощью уравнения найдём меньшую сторону длинного прямоугольника:

$2\times9+2x=2(15–x)+2\times9/2$;

$18+2x=30–2x+9$;

$4x=21$; $x=5{,}25$.

Периметр равен $18+2\times5{,}25=28{,}5$.

Замечание. Требовать доказательства, что других разбиений нет, не нужно, хотя это можно доказать.

Критерии проверки.

Указано два примера: 1 балл.
Указано три примера: 3 балла.
Указано четыре примера: 7 баллов.

3. На острове Логики живут 40 рыцарей (всегда говорящих правду), 25 лжецов (всегда говорящих неправду) и несколько софистов. Софист может произносить только такие фразы, которые на его месте не смогли бы сказать ни рыцарь, ни лжец. Например, стоя рядом со лжецом, софист может произнести фразу «Мы оба лжецы» (потому что, если бы он был рыцарем, то такая фраза была бы ложью, а если бы он был лжецом, она была бы истиной). Однажды софист произнёс два утверждения о жителях острова:1. "На острове живут ровно ... лжецов." 2. "Софистов на острове не больше, чем лжецов". Восстановить первое утверждение софиста. Сколько на острове софистов?

Ответ. 1) На острове живут ровно 26 лжецов; 2) 27 софистов.

Решение.

1) Если бы софист был лжецом, он должен сказать правду, и тогда он скажет, что лжецов 25+1=26. А если бы он был рыцарем, лжецов будет 25, и он сказал неправду.

2) Пусть С- количество всех софистов на острове. Если бы софист был лжецом, он должен сказать правду, и тогда он скажет, что $С–1 \le 25+1$, или $С\le27$. Если бы софист был рыцарем, он должен сказать неправду, и тогда верно будет, что $С–1>25$, или $С>26$. Единственное натуральное число, удовлетворяющее обоим неравенствам, это 27.

Критерии проверки.

Правильно указано утверждение про лжецов без обоснования: 1 балл.

Правильно указано количество софистов без обоснования: 2 балла.

За обоснование каждого из утверждений добавляется по 2 балла.

4. В ряд выписано 2016 чисел. Каждое, кроме первого и последнего, равно сумме своих соседей. Найти суммувсех 2016 чисел.

Ответ: сумма всех чисел равна нулю.

Решение. Пусть первое число *a*, а второе *b*. Третье обозначим *x*. Тогда $a+x=b$ и, значит, $x=b–a$. Выразим теперь четвёртое учерез *a* и *b*. $b+y=b–a$ и,значит, $y= –a$. Продолжая, получим: *a, b, b–a, –a, –b, a–b, a, b,* ...Значит, числа повторяются с периодом 6. Так как 2016:6=336, сумма всех чисел равна сумме первых шести, увеличенная в 336 раз. Сумма первых шести равна нулю, и значит сумма всех равна нулю.

Критерии проверки.

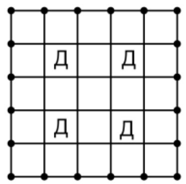
Только ответ: 0 баллов.

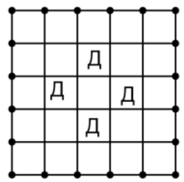
Разбор конкретного примера: 1 балл.

5. На доске 5×5 расположен крест из пяти клеток (клетка и все её соседи). Какое наименьшее число детекторов нужно поместить в клетки доски, чтобы точно определить положение креста? (Детектор показывает, принадлежит клетка кресту или нет, и срабатывают детекторы одновременно.)

Ответ: 4.

Решение. Всего положений креста на доске 9, столько же, сколько положений центральной клетки креста. У детектора два состояния, значит всего возможных состояний трёх детекторов $2^3=8$ и, значит, с их помощью нельзя различить 9 положений креста. Примеры возможного расположения четырёх детекторов показаны на рисунках:





Критерии проверки.

Только ответ: 0 баллов.

Пример с 4 детекторами 3 балла.

Доказана недостаточность трёх детекторов: 4 балла.