Решения олимпиадных заданий муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2016-2017 учебного года

7-й класс

7.1 Существует ли четырехзначное натуральное число с различными ненулевыми цифрами, обладающее следующим свойством: если к нему прибавить число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то получится число, делящееся на 101?

Решение: Достаточно привести пример такого числа. В действительности годится любое число, у которого сумма крайних цифр равна сумме средних цифр. Пример: возьмем число 1526, тогда $1526+6251=7777=77\cdot 101$; или возьмем число 8967, тогда $8967+7698=16665=165\cdot 101$; или, самое простое, возьмем число 1234, и т.п.

Ответ: существует.

7.2 Имеется 9 карточек с числами 1,2,3,4,5,6,7,8,9. (на каждой карточке написано одно число). Какое наибольшее количество этих карточек можно разложить в некотором порядке в ряд так, чтобы на любых двух соседних карточках одно из чисел делилось на другое?

Решение: Все 9 карточек положить в ряд требуемым образом не получится. В самом деле, число 5 делится только на 1, а из данных чисел на 5 ни одно не делится, поэтому у карточки 5 не может быть двух соседей в ряду, т.е. 5 должна стоять с краю, и соседом должно быть число 1. Аналогично, число 7 должно стоять с краю и соседствовать с 1. Все это вместе невозможно.

А вот 8 карточек требуемым образом положить можно, пример: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5.

Ответ: 8.

7.3 В классе 26 учащихся. Они договорились, что каждым из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо рыцарем (рыцари всегда говорят правду). Когда они пришли в класс и сели за парты, каждый из них сказал: «Я сижу рядом с лжецом». Затем некоторые учащиеся пересели за другие парты. Мог ли после этого каждый сказать: «Я сижу рядом с рыцарем»? Каждый раз за любой партой сидело ровно двое учащихся.

Решение: Фраза «Я сижу рядом с лжецом» могла быть произнесена только тогда, когда за одной партой сидят лжец и рыцарь. Это означает, что в классе поровну лжецов и рыцарей − по 13. Фраза «Я сижу рядом с рыцарем» может быть произведена только в том случае, когда за одной партой сидят либо два лжеца, либо два рыцаря. Но 13 − число нечетное, поэтому всех лжецов рассадить по двое за партой невозможно.

Ответ: не мог.

7.4 Белка в парке становится радостной, когда съедает по ореху трех разных видов. Какое наибольшее количество белок Петя сможет сделать радостными, если он принес в парк 20 бразильских орехов, 30 лесных, 40 грецких и 50 арахисовых?

Решение: Покажем сначала, как может действовать Петя, чтобы сделать радостными 45 белок. Начальная Петина позиция: Б-20, Л-30, Г-40, А-50 (Б-бразильские орехи, Л − лесные и п.т.). Пусть Петя сделает радостными 15 белок, выдав каждой из них по одному Б, одному Г и сумму А. Получается позиция Б-5, Л-30, Г-25, А-35. Пусть теперь Петя сделает радостными еще 25 белок, выдав каждой из них по одному Л, одному Г и одному А. Получится позиция Б-5, Л-5, Г-0, А-10. Теперь Петя может сделать радостными еще 5 белок, выдав каждой из них по одному Б, одному Л и одному А. Итоговая позиция: Б-0, Л-0, Г-0, А-5, и $15+25+5=45$ радостных белок.

Больше 45 радостных белок получить нельзя, как бы не действовал Петя. В самом деле, после 45-й выдачи (по три ореха каждая) остается $20+30+40+50-45\cdot 33=5$ орехов. При этом орехов А должно остаться не менее $50-45=5$, так как при каждой встрече используется не более одного ореха А. Это означает, что 45-я выдача орехов (если таковая случается) неизбежно приводит к позиции Б-0, Л-0, Г-0, А-5, и продолжение невозможно.

Ответ: 45.

7.5 Одно натуральное число больше другого на 4. Докажите, что их произведение не оканчивается на 31.

Решение: Пусть x − меньшее число. Тогда $x+4$ − большее число. Предположим, что их произведение оканчивается цифрами 31:

$$x(x+4)=...31$$

(многоточие − это предыдущие цифры, нам они не важны). Прибавим 4 к обеим частям равенства:

$$x^2+4x+4=...35.$$

Но $x^2+4x+4=(x+2)^2$. Таким образом, число …35 является квадратом натурального числа. Мы видим, что оно делится на 5. Но если точный квадрат делится на 5, то он делится на $5^2=25$.

Но наше число …35 на 25 не делится. Значит, исходное предположение неверно, и произведение не оканчивается на 31.