Всероссийская олимпиада школьников по математике
2016 – 2017 учебный год
Муниципальный этап
Ответы 7 класс

1. Можно ли в каждую клетку квадратной таблицы 5×5 поставить 0 или 1 так, чтобы сумма в каждом квадратике 2×2 делилась на 3, при этом в таблице бы встречались и нули, и единицы?

Ответ: да, можно.

Решение. Например, так:

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Замечание. Данная расстановка не единственна.

Критерии. Верная расстановка без обоснования, как она получается – 7 баллов.

2. На олимпиаде за каждую решённую задачу можно было получить 3, 8 или 10 баллов. Вася получил 45 баллов. Какое наименьшее число задач он мог при этом решить? (Необходимо объяснить, почему он не мог решить меньше задач.)

Ответ: 6 задач***. Решение.*** Так как 8 и 10 – четные числа, а 45 – нечетное число, то есть обязательно задача за 3 балла. Набрать 42 балла за 4 задачи невозможно, даже если получать по 10 баллов. Следовательно, нужно минимум 5 задач, дающих в сумме 42 балла, и всего задач 6. Пример на 6 задач– 3+8+8+8+8+10 .

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Приведен пример, когда может быть 6 задач — 2 балла.

Доказано, что число задач не менее 6 — 5 баллов.

3. Назовем число возрастающим, если его цифры идут в порядке возрастания и оно не является однозначным (например, 126 – возрастающее, а 314 и 559 – нет). Можно ли представить число 2500 в виде суммы двух возрастающих четырехзначных чисел?

Ответ: **нет.** ***Решение.*** Допустим, что можно. Ни одно из чисел на 2 начинаться не может, значит, оба начинаются на 1. Значит вторая цифра в каждом из них не меньше 2, третья не меньше трёх, и четвёртая не меньше четырёх. Последняя цифра ни в одном из них не может быть более 6, ведь тогда в другом числе она меньше четырёх. Итак, их последние цифры могут быть только 4, 5 или 6. Если в конце 4 или 6, то одно из чисел равно 1234 – что невозможно. Если последние цифры 5, то предпоследняя цифра либо 3, либо 4, что опять-таки невозможно.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Объяснено, что последняя цифра не менее 4 — 2 балла.

Доказано, что их последние цифры могут быть только 4, 5 или 6, но дальше разобран только один из случаев — 4 балла.

4. Из сырных кубиков $1 \times 1 \times 1$ сложили куб $4 \times 4 \times 4$. В первый день мышка съела один из угловых кубиков. Каждый следующий день она съедала те кубики $1 \times 1 \times 1$, у которых была грань соседняя с гранью кубика, съеденного накануне. За сколько дней мышка съела весь куб $4 \times 4 \times 4$?

Ответ: за 10 дней. Решение. Понятно, что если мышка съедает кубик F, противоположный начальному, то весь куб $4 \times 4 \times 4$ уже съеден. Давайте мысленно считать, что у нас очень много мышей, которые работают вместе. Только каждая ест не более одного кубика в день, и на ночь остаётся в той уже пустой клетке, которую этот кубик занимал (в одной клетке может быть очень много мышей). При этом мышки съедают всё, что можно съесть согласно условию. Понятно, что эта ситуация равносильна исходной. При поедании нового кубика любая мышка сдвигается на 1 ближе к F по одному из трёх измерений. В первый день каждая на 3+3+3 единицы удалена от F. Значит потребуется ровно 9 дней плюс исходный, чтобы съесть F.

Критерии. Только ответ — 2 балла.

5. В каждой из трех коробок лежит 200 конфет. Карлсон сначала съедает три конфеты из одной коробки, потом – по одной конфете из трех разных коробок, затем снова три конфеты из какой-то одной (любой) коробки, потом опять по одной конфете из трех разных коробок. Он строго чередует ходы. Сможет ли он съесть все конфеты?

Ответ: нет***.*** ***Решение.*** Всего надо съесть 600 конфет, а за ход съедается 3 конфеты, поэтому будет сделано 200 ходов. Ходы чередуются, всего ходов 200, поэтому ходов, когда из одной коробки съедается 3 конфеты, 100. Но из каждой коробки надо сделать равное число таких ходов, то есть число таких ходов должно делиться на 3, противоречие.

Критерии. Любой неполный перебор частных случаев — 0 баллов.