Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2016 г.)

8 класс

1. Докажите, что $13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 + \ldots + 13^{2014} + 13^{2015}$ делится нацело на 7.

Доказательство: $13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 + \ldots + 13^{2014} + 13^{2015} = 13\,(1 + 13) + 13^3(1 + 13) + \ldots + 13^{2014}(1 + 13) = 14\,(13 + 13^3 + \ldots + 13^{2014})$. Так как 14 делится на 7, то и само число делится нацело на 7.

2. Имеет ли уравнение $xy = 2016\,(x+y)$ решения в целых числах, отличные от $x = 0$, $y = 0$?

Решение. Преобразуем уравнение к следующему виду: $(x - 2016)(y - 2016) = 2016^2$. Видим, что уравнение имеет, например, решение $x = y = 4032$.

Ответ: да, например, $x = y = 4032$.

3. Известно, что в Δ ABC $\angle A = 3 \angle C$. На стороне BC взята точка D так, что $\angle ADC = 2 \angle C$. Докажите, что $AB + AD = BC$.

Доказательство. Продолжим отрезок BA за точку A и отложим на нем отрезок AE = AD. Заметим, что $\angle EAC = 180 - \angle BAC = 180 - 3 \angle C$, поэтому треугольники ADC и AEC равны (по сторонам AC, AD = AE и углу между ними). Отсюда находим углы треугольника AEC: $\angle AEC = \angle ADC = 2 \angle C$, $\angle ACE = \angle C$, т.е. $\angle BCE = 2 \angle C$, поэтому треугольник BEC равнобедренный. Таким образом, $AB + AD = AB + AE = BE = BC$.

4. Пройдя половину пути, поезд уменьшил скорость на 25% и поэтому опоздал в место назначения на 0,5 часа. За какое время поезд прошёл весь путь?

Решение. Примем длину всего пути за S. Пусть x км/ч – скорость поезда при прохождении им первой половины пути. Тогда $0{,}75x$ км/ч – скорость поезда при прохождении им второй половины пути. Следовательно, $\frac{0{,}5S}{x}$ часов поезд затратил на прохождение первой половины пути, $\frac{0{,}5S}{0{,}75x}$ часов – второй, $\frac{S}{x}$ часов требуется поезду на прохождение всего пути с постоянной скоростью x км/ч.

По условию задачи имеем уравнение

$$\frac{0{,}5S}{x} + \frac{0{,}5S}{0{,}75x} = \frac{S}{x} + 0{,}5,$$

решив которое, найдем $x = 3{,}5$.

Ответ: за 3,5 часа

5. Дана функция $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$**. Докажите равенство:**

$$f(-\frac{1}{x})\cdot f(x)=f(\frac{1}{x})\cdot f(-x).$$

Доказательство. Преобразуем:

$$f(-\frac{1}{x})\cdot f(x)=\frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1}\cdot\frac{x-1}{x+1}=\frac{-1-x}{-1+x}\cdot\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+1}=1,$$

$$f(\frac{1}{x})\cdot f(-x)=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}\cdot\frac{-x-1}{-x+1}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{x+1}{x-1}=1.$$ Значит,

$f(-\frac{1}{x})\cdot f(x)=f(\frac{1}{x})\cdot f(-x)$. Что и требовалось доказать.