Для педагога

Всероссийская олимпиада школьников 2016г
муниципальный этап
Математика
8 класс

Общее время выполнения работы – **3 часа (180 мин).**
Максимальное количество баллов – **35.**

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1
Через вершину D параллелограмма ABCD проведена прямая, отсекающая 1/100-ю часть от стороны AB, считая от вершины A. Какую часть от диагонали AC отсекает та же прямая?
Количество баллов 7
Ответ:
$\frac{1}{101}$
Решение
Обозначим n = 100.
1-й способ
Пусть прямая пересекает диагональ в точке K , а сторону AB в точке N.
По условию, AN : AB = 1 : n.
Треугольники AKN и CKD подобны (их соответствующие стороны параллельны). Поэтому
AK : KC = AN : CD = AN : AB = 1 : n
Отсюда:
AK : KC = 1 : (n+1)
2-й способ
Разобьем стороны AB и DC на n равных частей, после чего соединим эти точки, а также точку B отрезками, параллельными AN. Из теоремы Фалеса следует, что диагональ делится этими отрезками на равные отрезки; количество этих отрезков n + 1.

Задание 2
В пробирке находятся амебы трех типов: A, B и C. Две амебы любых двух типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке осталась одна амеба. Каков ее тип, если исходно амеб типа A было 19 штук, типа B – 20 штук, а типа C – 21 штука?
Количество баллов 7

Ответ:
B
Решение
Пусть a, b и c – число амеб типа A, B и C соответственно. При слиянии амеб типа A и B величина a – b не меняется. Если сливаются A и C, эта величина уменьшается на 2. Если сливаются B и C, эта величина увеличивается на 2.
Значит, при любом слиянии четность величины a – b остается неизменной. То же верно и по отношению к величинам b – c и c – a.
В заключительный момент одна из величин a, b и c равна 1, а две остальные равны нулю. Значит, эти две последние и изначально были одинаковой четности. Поэтому это a и c. A в одиночестве осталась амеба B.
Оценивание
Верное решение – 7 баллов. Если ответ угадан, но не обоснован – 1 балл.

Задание 3
На гранях кубика расставлено 6 различных чисел от 6 до 11. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырех боковых гранях оказалась равна 36, во второй – 33. Какое число написано на грани, противоположной той, где написано число 10?
Количество баллов 7
Ответ:
8
Решение
Сумма чисел на всех гранях равна 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 51. При первом броске сумма на верхней и нижней гранях равна 51 – 36 = 15, при втором — 51 – 33 = 18. Значит, на третьей паре противоположных граней сумма равна 51 – 15 – 18 = 18. Сумму 18 можно получить двумя способами: 11 + 7 или 10 + 8. Значит, на парах граней с суммой 18 напротив 11 находится 7, а напротив 10 – 8.

Задание 4
Вычислите произведение $\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{1000^3-1}{1000^3+1}$
Количество баллов 7
Ответ:
$\frac{333667}{500500}$
Решение
Заметим, что для любого натурального n:
$n^2 - n + 1 = (n-1)^2 + (n-1) + 1$
Поэтому

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{1000^3-1}{1000^3+1}=$$
$$=\frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(1000-1)(1000^2+1000+1)}{(1000+1)(1000^2-1000+1)}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{1000-1}{1000+1}\cdot\frac{1000^2+1000+1}{2+1}=$$
$$=\frac{1\cdot 2}{1000(1000+1)}\cdot\frac{1000^2+1000+1}{3}=$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{1001000}\right)=$$
$$=\frac{2002002}{3003000}=\frac{333667}{500500}$$

Задание 5

За одну операцию разрешается изменить длину одной из сторон треугольника, сохранив длины двух других, при этом снова должен получиться треугольник. Барон Мюнхгаузен утверждает, что смог за *n* таких операций превратить некий треугольник периметра 34 в треугольник периметра 1. При каком наименьшем значении *n* его слова могут быть правдой?

Количество баллов 7

Ответ:

8

Решение

Ответ, очевидно, не меняется, если превращать треугольник периметра 1 в треугольник периметра 21. Проделаем с треугольником со сторонами $a \le b \le c$ две операции. После первой – стороны получившегося треугольника будут не больше b, c, $b + c$, после второй – не больше c, $b + c$, $b + 2c$. Если $a + b + c = 1$, то $a \le b \le c < \frac{1}{2}$ (так как $c < a + b$), то есть после двух операций стороны треугольника, получившегося из треугольника периметра 1, будут меньше соответственно $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ Тогда после трех операций стороны треугольника будут меньше соответственно 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ после четырех – $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{8}{2}$, после пяти – $\frac{5}{2}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{13}{2}$, после шести – $\frac{8}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{21}{2}$, после семи – $\frac{13}{2}$, $\frac{21}{2}$, $\frac{34}{2}$. Поскольку $\frac{13}{2}+\frac{21}{2}+\frac{34}{2}=34$ семи операций нам не хватит. А восьми операций достаточно: мы начинаем с треугольника со сторонами $0+3e$, $\frac{1}{2}-2e$, $\frac{1}{2}-e$, где e – маленькое число, например можно взять е = 0,0001, а после i-й операции стороны будут равны трем последовательным членам такого ряда:

$$\frac{1}{2}-e,\ \frac{1}{2}-2e,\ \frac{2}{2}-4e,\ \frac{3}{2}-8e,\ \frac{5}{2}-16e,\ \frac{8}{2}-32e,\ \frac{13}{2}-64e,\ \frac{21}{2}-128e,\ \frac{34}{2}-256e,\ \frac{13}{2}+128e+256e$$

Здесь сумма чисел первой тройки равна 1, а сумма чисел последней тройки равна 34.