

8 класс

Задача 1. Сумма цифр натурального числа a относится к сумме цифр числа $2a$, как 19 к 9. Докажите, что в десятичной записи числа a хотя бы 29 цифр.

Решение. Из условия следует, что сумма цифр числа $2a$ делится на 9. Поэтому на 9 делится и само число $2a$, а, следовательно, и число a , и сумма его цифр. Кроме того, сумма цифр числа a делится на 19. Значит, она делится на 171. Пусть она равна $171n$. Если бы переносов через разряд при сложении «в столбик» $a+a$ не было, сумма цифр числа $2a$ равнялась бы $342n$. На самом деле она равняется $\frac{9 \cdot 17n}{19} = 81n$. Таким образом, за счет переносов сумма цифр оказалась меньше на $261n$. При этом за счет каждого переноса сумма уменьшалась на 9. Значит переносов было $\frac{261n}{9} = 29n$, откуда ясно, что разрядов у суммы не меньше 29.

Задача 2. Докажите, что куб любого натурального числа, большего 1, может быть представлен как разность двух квадратов натуральных чисел.

Решение. Пусть $n^3 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Попробуем решить уравнение $a+b = n^2$, $a-b = n$. Сложив эти два равенства, получаем, что $2a = n^2 + n$, а вычтя, получаем, что $2b = n^2 - n$. Отсюда $n^3 = \frac{n^2+n}{2}^2 - \frac{n^2-n}{2}^2$. В обеих скобках находятся натуральные числа, так как n^2 и n имеют одну четность.

Задача 3. Квантовому суперкомпьютеру поручено выполнять следующую задачу. В его память вводится целое число в десятичной нумерации, затем из этого числа удаляется последняя цифра, которая умножается на 10 и складывается с числом, оставшимся после удаления последней цифры. Может ли суперкомпьютер с помощью указанных операций из числа 11^{2017} получить число 2017^{11} ?

Решение. На каждом шаге операции из числа $10a+b$ получается число $a+10b$. Если первоначальное число делилось на 11, то есть, $10a + b = 11k$, тогда $b = 11k - 10a$, $10b = 110k - 100a$ и, в итоге получаем, что $a+10b = 110k - 99a = 11(10k - 9a)$. Следовательно, полученное в результате операции число также делится на 11. Исходное число, введённое в компьютер, делится на 11, а

число 2017^{11} на 11 не делится, следовательно, не может быть получено с помощью указанных операций.

Задача 4. Куб разбили на 27 одинаковых кубиков. Жук в начальный момент находится в центральном кубике. Из каждого кубика он может перейти в один из шести соседних кубиков, которые имеют с ним общую грань. Может ли жук обойти все кубики, побывав в каждом по одному разу?

Решение. Обойти все кубики жук не сможет. Чтобы доказать это, раскрасим кубики в два цвета. Пусть один из угловых кубиков - чёрный. Все кубики, имеющие с ним общую грань, - белые. Кубики, соседние с белыми, закрасим в чёрный цвет и так далее. Из 27 кубиков 14 будут чёрными, 13 – белыми. Центральный кубик – белый. При каждом ходе жука цвет кубика меняется на противоположный, поэтому после 27 ходов, начиная с белого кубика, жук пройдёт 14 белых и 13 чёрных. Поскольку белых кубиков только 13, то за 27 ходов хотя бы один белый кубик будет пройден дважды. Следовательно, обойти все 27 кубиков, побывав в каждом по одному разу, жук не сможет.

Задача 5. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) выбрана точка D так, что $CD=CA$. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ADC .

Решение. Центр O вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника ABC . Но биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является и высотой, и медианой. Значит точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC . Аналогично, точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AD . Значит, O – центр окружности, описанной около треугольника ADC .