2016 год

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап

Решения

8 класс

1. $a^3+b^3+12ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+12ab=4(a^2-ab+b^2)+12ab=4a^2+4b^2+8ab=4(a+b)^2=4\cdot 16=64$

2. Каждый раз, когда мальчик попадал в цель, число имеющихся у него пулек оставалось прежним (одну использовал и одну получал от отца). Каждый раз, когда мальчик промахивался, число имеющихся у него пулек уменьшалось на 2 (одну использовал и одну отбирал отец). Это значит, что сын за 55 выстрелов промахнулся 10 : 2 = 5 раз, стало быть, попал 55 - 5 = 50 раз.

3. Из условия задачи следует, что ∠EFD=∠ADF=∠AFD (первое равенство верно, так как EF∥AC и внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, равны, второе равенство верно, поскольку в равнобедренном треугольнике AFD углы при основании равны). Поэтому равны и углы AFB и EFB, смежные с углами AFD и EFD. Кроме того, по условию ∠ABF=∠EBF. Следовательно, треугольники BFE и BFA равны по общей стороне BF и двум прилежащим к ней углам. Поэтому равны и их соответственные стороны BE и AB.

4. Число 4^n+5 делится на 3, если число $4^n-1=(4^n+5)-6$ делится на 3. Но $4^n-1=(2^n-1)(2^n+1)$. Так как 2^n не делится на 3, то одно из чисел 2^n-1 или 2^n+1 – делится на 3. А тогда на 3 делится и число $4^n – 1$. Следовательно, делится на 3 число 4^n+5.

5. Возьмем любых двух друзей *A* и *B*. Из остальных девяти человек *A* имеет не менее 5 друзей, и *B* имеет не менее 5 друзей. Значит, среди друзей *A* и *B* есть хотя бы один общий (в противном случае было бы 5 + 5 ≤ 9). Вместе с *A* и *B* этот общий друг составляет нужную тройку друзей.