LXIIIВсероссийская олимпиада школьников по математике

8 класс

1. Можно ли подобрать 2016 целых чисел, произведение которых равно 9, а сумма равна нулю?

Ответ: можно.

Решение. Пример: 1007 единиц, одна 3 (это положительные) и им противоположные числа (это отрицательные).

Замечание. Есть и другие примеры. 1004 единицы, 2 тройки и 1010 минус единиц. Ещё один пример получается заменой всех чисел на противоположные.

Критерии проверки.

Любой правильный пример : 7 баллов.

2. Найти все простые p такие, что $a^3b–ab^3$ делится на p при любых целых a и b.

Ответ: 2 и 3.

Решение. Пусть a=2 и b=1, тогда $a^3b–ab^3$=8–2=6=2·3. Значит, никаких других простых делителей, кроме 2 и 3, быть не может.

Докажем, что 2 и 3 подходят.

Разложим это выражение на множители: $a^3b–ab^3=ab(a^2–b^2)=ab(a–b)(a+b)$.

Докажем, что оно делится на 2. Если одно чисел a и b кратно 2, то на 2 делится один из первых двух множителей, и значит всё произведение. Если оба не делятся, то они оба нечётны, и на 2 делится, например, их разность, а значит и всё произведение.

Докажем, что оно делится на 3. Если одно чисел a и b кратно 3, то на 3 делится один из первых двух множителей и, значит, всё произведение. Если оба не делятся, то они могут давать одинаковые остатки от деления на 3, и тогда на 3 делится их разность, а если разные, то есть 1 и 2, то на 3 делится их сумма и значит всё произведение.

Критерии проверки.

Не доказано, что других простых делителей, кроме 2 и 3, нет: не более 5 баллов.

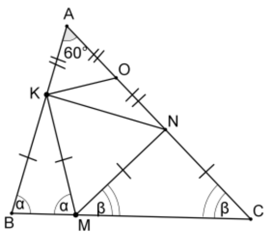
Доказана делимость на 2: 2 балла.

Доказана делимость на 3: 3 балла.

3. В треугольнике ABC ∠A=60°. На сторонах BC, AC и AB взяты точки M, N и K соответственно. Оказалось, что BK=KM=MN=NC и AN=2AK. Доказать, что а) KN⊥AB; б) MN⊥AC.

Решение. а) В треугольнике AKN проведем медиану KO к стороне AN. Получим AK=AO=ON. Т.к. ∠A=60°, то треугольник AKO – равносторонний, и ∠AKO=∠AOK=60°. Треугольник KON –равнобедренный (KO=ON) и, следовательно, ∠OKN=∠ONK=30°. Находим сумму углов AKO и OKN. Она равна 90°.

б) Из условия следует, что треугольник KMB равнобедренный с основанием BM. Углы при основании этого треугольника равны, обозначим их α. Из условия следует, что треугольник NMC равнобедренный с основанием CM. Углы при основании этого треугольника равны, обозначим их β. Из равенства суммы углов треугольника ABC 180° находим, что α+β=120°. Из этого равенства следует, что ∠KMN=60°, а так как треугольник KMN равнобедренный, то он и равносторонний, поэтому ∠KNM=60°. Далее ∠MNO=∠MNK +∠ONK=60°+30°=90°. Значит MN⊥AC.



Критерии проверки.

Пункт а) оценивается из 2 балла.

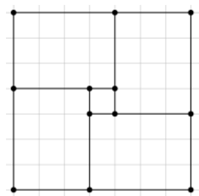
Пункт б) оценивается из 5 баллов.

4. Числа a и bудовлетворяют неравенству $ab \leq 0$. Доказать, что $a^2+b^2-a-b-ab+0{,}25\geq 0$. При каких a и b достигается равенство?

Ответ: равенство достигается при (a=0 и b=0,5) или (a=0,5 и b=0).

Решение. Выделим полный квадрат в левой части: $a^2+b^2-a-b-ab+0{,}25=(a + b - 0{,}5)^2-3ab = (a + b - 0{,}5)^2+(-3ab)\geq 0$

Последнее неравенство верно, так как квадрат всегда число неотрицательное, а неотрицательность второго слагаемого следует из условия. Для выполнения равенства необходимо равенство обоих слагаемых нулю, откуда и следует ответ.



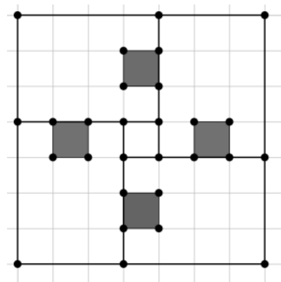
Критерии проверки.

Только ответ: 0 баллов.

5. Имеется бумажный квадрат 7×7, все клетки которого белые. Какое наименьшее число клеток нужно выкрасить в чёрный цвет, чтобы из него нельзя было выстричь прямоугольник, в котором не менее 10 клеток, и все они белого цвета?

Ответ: 4.

Решение. Разобьём квадрат 7×7 на 5 прямоугольников (см. рис.): четыре 3×4 и квадрат 1×1. Если закрашено только три клетки, то найдётся белый прямоугольник из 12 клеток. Как закрасить 4 клетки показано на следующем рисунке.



Критерии проверки.

Пример четырёх черных: 3 балла.

Оценка, что трёх не хватит : 4 балла.