ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2016-2017 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

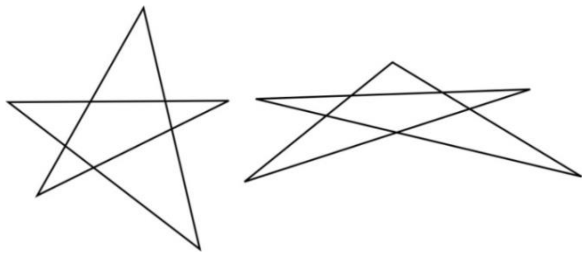
8 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

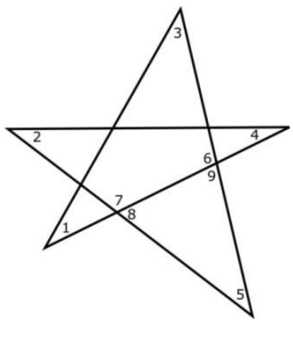
Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Вася и Петя нарисовали по пятиконечной звёздочке. У звёздочки Пети все углы в вершинах звезды острые, а у звезды Васи есть тупой угол. Каждый из них утверждает, что сумма углов в вершинах его звёздочки больше. Кто из них прав?



Ответ: никто.
Решение. Обозначим углы звёздочки, как показано на рисунке



$$\angle 1 + \angle 3 = 180° - \angle 6 = \angle 9;$$
$$\angle 2 + \angle 4 = 180° - \angle 7 = \angle 8.$$

Тогда

$$\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4 + \angle 5 = \angle 9 + \angle 8 + \angle 5 = 180°.$$

Эти расчёты верны для обеих звёздочек, сумма углов в вершинах каждой пятиконечной звезды равна $180°$.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов. Доказано, что сумма острых углов правильной пятиконечной звезды равна $180°$ – 2 балла. Доказано, что сумма острых углов остроугольной пятиконечной звезды равна $180°$ – 5 баллов.

2. Пароль состоит из четырёх различных цифр, сумма которых равна 27. Сколько существует вариантов пароля?

Ответ: 72.

Решение. Среди цифр пароля есть 9. Иначе, поскольку все цифры пароля различны, наибольшая сумма цифр не превзойдёт $8 + 7 + 6 + 5 = 26$. Если есть 9 и 8, то остальные две цифры не больше 7, и их сумма равна 10. Возможны два варианта: 7, 3 и 6, 4, получаем наборы $9, 8, 7, 3$ и $9, 8, 6, 4$. Если нет цифры 8, то единственный набор – $9, 7, 6, 5$. Подсчитаем число возможных паролей. В каждом наборе четыре цифры могут быть переставлены числом способов $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Всего вариантов пароля $24 \cdot 3 = 72$.

Комментарий. Верный ответ получен методом полного перебора – 7 баллов. Верный ответ получен методом неполного перебора, причем без объяснения отброшены достаточно очевидные случаи – 6 баллов. При верном методе подсчёта есть ошибки в нахождении числа вариантов – снижать на 2 балла за каждую ошибку. Установлено только, что среди цифр пароля есть 9 – 1 балл. За наличие полезных идей – 1–2 балла.

3. Действительное число x назовём интересным, если, зачеркнув одну из цифр в его десятичной записи, можно получить число $2x$. Найдите наибольшее интересное число.

Ответ: $0{,}375$.

Решение. При зачеркивании цифры из целой части действительное число x не может увеличиться, а при зачеркивании цифры из дробной части – может увеличиться только на число, меньшее 1. Поэтому искомое число x должно быть меньше 1, и если его первая цифра после запятой не равна 0 (иначе число не будет интересным), то стирать надо её. Пусть эта первая цифра равна y, а $x - \overline{0,y} = z$. Тогда после стирания цифры y получится число $10z$, откуда имеем $10z = 2(y/10 + z)$ или $40z = y$. Так как $z < 0{,}1$ имеем $y \le 3$. Подставляя $y = 3$, находим $z = 0{,}075$, откуда и следует ответ.

Комментарий. Верный ответ получен методом полного и обоснованного перебора – 7 баллов. Верный ответ получен методом неполного перебора, причем без объяснения отброшен случай, когда первая цифра после запятой равна 4 – 3 балла. Дан верный ответ, показано, что число является интересным, но не обосновано, что оно наибольшее – 2 балла. Приведены примеры интересных чисел – 1 балл.

4. У Владимира есть 100 коробочек. В первой коробочке лежит один камень, во второй – два и т. д. Владимир может перекладывать камни из одной коробочки в другую, если в сумме в этих коробочках 101 камень. Сможет ли он указанными операциями добиться того, что в семидесятой коробочке станет 69 камней, в пятидесятой – 51 камень, а в остальных останется прежнее число камней?

Ответ: нет, это невозможно.

Решение. Вначале имеются 50 коробочек с чётными номерами, в каждой из них чётное число камней. При перекладывании берутся две коробочки, общее количество камней в которых равно 101, то есть количества камней в которых различаются по чётности. При любом перекладывании в результате будет снова одна коробочка с чётным числом камней, а другая – с нечётным. Значит, количество коробочек с чётным числом камней всегда будет равно 50. Если бы числа 50 и 70 заменились на два нечётных числа (51 и 69), а остальные числа не поменялись, то в этом случае число коробочек с чётным числом камней было бы равно 48. Это невозможно.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов. Ответ получен из рассмотрения примеров без доказательства – 1 балл. Доказательство проведено для конкретного примера, и не может быть обобщено – 1 балл. Доказательство проведено для конкретного примера, но может быть обобщено – 3 балла. При отсутствии доказательства за потенциально полезные идеи 2–3 балла.

5. Каждый из двух учеников написал три последовательных натуральных чисел, среднее из которых является кубом натурального числа. Затем они перемножили все шесть чисел. Докажите, что полученное произведение делится на 5184.

Решение. Рассмотрим произведение N трёх чисел, написанных одним учеником, и докажем, что оно делится на 9 и на 8, а, следовательно, и на 72.

По условию $N=(k^3-1)k^3(k^3+1)$, где k – некоторое натуральное число. В случае чётного k на 8 делится k^3, если же k нечётно, то числа k^3-1 и k^3+1– последовательные чётные. Значит, одно из них делится, по крайней мере, на 4, а второе на 2. Этим доказана делимость на 8. Из чисел $k-1$, k и $k+1$ ровно одно делится на 3. Если это k, то, будучи кубом, k делится на 27 и тем более на 9. Пусть $k-1$ делится на 3. Тогда $k^3-1=(k-1)((k-1)^2+3k)$, и каждая из скобок делится на 3, а всё число k^3-1 делится на 9. Пусть $k+1$ делится на 3. Тогда $k^3+1=(k+1)((k+1)^2-3k)$, и каждая из скобок делится на 3, а всё число k^3-1 делится на 9. Таким образом, произведение трёх чисел, написанных каждым учеником, делится на 9 и на 8, и, следовательно, на 72, а произведение всех шести чисел делится на $72 \cdot 72 = 5184$.

Комментарий. Установлено, что надо доказать делимость трёх последовательных чисел на 9 и на 8 – 1 балл. Доказана делимость на 8 – 3 балла, доказана делимость на 9 – 3 балла; баллы суммируются.