Решения олимпиадных заданий муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2016-2017 учебного года

8-й класс

8.1 $f(x) = ax^2 + bx + c$ − квадратный трехчлен ($a \neq 0$). Известно, что $f(999) = 1$ и $f(1000) = 1$. Дима утверждает, что при этих условиях свободный член c должен равняться 1. Докажите, что Дима неправ.

<u>Решение:</u> Если бы Дима был прав, то получилось бы $f(999) = f(1000) = c = f(0)$, т.е. квадратный трехчлен *f(x)* в трех различных точках $x = 0$, $x = 999$ и $x = 1000$ принял одинаковые значения, что невозможно.

Замечание: Возможно, более естественно прямое рассуждение от противного: пусть $c = 1$, тогда

$$\begin{cases} a \cdot 999^2 + b \cdot 999 + 1 = 1, \\ a \cdot 1000^2 + b \cdot 1000 + 1 = 1, \end{cases}$$

что эквивалентно

$$\begin{cases} a \cdot 999 + b = 0, \\ a \cdot 1000 + b = 0, \end{cases}$$

откуда $a = 0$. Противоречие.

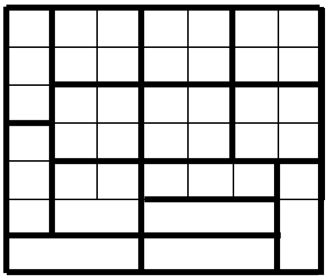
8.2 Докажите, что из любых 13 последовательных натуральных чисел хотя бы одно меньше суммы своих делителей (кроме себя и 1).

<u>Решение:</u> Среди 13 последовательных натуральных чисел есть числа (одно или два), кратные 12. Пусть 12k − такое число. Среди его делителей содержатся числа $2k$, $3k$, $4k$, $6k$. Сумма только этих делителей больше данного числа.

8.3 Рабочие укладывали пол размера $n \times n$ плитками двух типов: 2×2 и 3×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количество плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? Резать плитки, а также накладывать из друг на друга нельзя.

<u>Решение:</u> Пусть использовано m плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4m + 3m = 7m = n^2$. Значит, n делится на 7.

Наоборот, если n делится на 7, то пол уложить можно. Заметим, что квадрат 7×7 можно уложить, используя по 7 плиток каждого вида, см.рис.

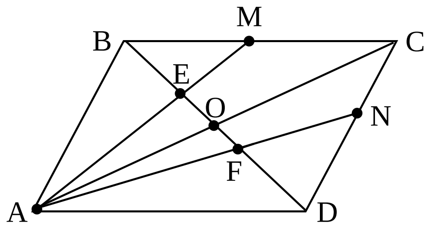


А квадрат $7k \times 7k$ можно разрезать на квадраты 7×7.

<u>Ответ:</u> при *n*, кратных 7.

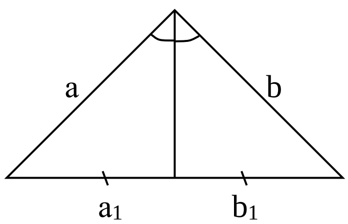
8.4 В параллелограмме ABCD точки M и N − середины сторон BC и CD соответственно. Могут ли лучи AM и AN делить угол BAD на три равные части?

<u>Решение:</u> См. рис. Допустим, что могут.



В треугольнике ABC отрезки AM и BO являются медианами. Поэтому $BE = \frac{2}{3}BO, \quad EO = \frac{1}{3}BO.$ Аналогично $DF = \frac{2}{3}DO = \frac{2}{3}BO, \quad FO = \frac{1}{3}DO = \frac{1}{3}BO$. Рассмотрим треугольник BAF. В этом треугольнике AE являются медианой, т.к. $BE = \frac{2}{3}BO$ и $EF = EO + FO = \, = \frac{1}{3}BO + \frac{1}{3}B = \frac{2}{3}BO$. По предложению, угол BAE равен углу EAF, и т.е AE является биссектрисой угла BAF в треугольнике BAF. В таком случае треугольник BAF − равнобедренный, и AE является его высотой, т.е. $AE \perp BD$. Аналогично, $AF \perp BD$. Значит, из точки A на прямую BD опущены два различных перпендикуляра AE и AF, что невозможно.

Замечание. Использовалось утверждение: если медиана совпадает с биссектрисой, то треугольник равнобедренный. См. рис.



$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ (св-во биссектрисы)

$a_1 = b_1$ (медиана) влечет $a = b$

8.5 Докажите, что если x − положительное число, то

$$x + \frac{1}{x(x+1)} > 1{,}4.$$

<u>Решение</u>: Если $x \le 1$, то, воспользовавшись неравенством $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ для $a \ge 0, b \ge 0,$ получим

$$x + \frac{1}{x(x+1)} \ge 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x(x+1)}} = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \ge \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1{,}4.$$

Пусть далее $x > 1$. Имеем:

$$x + \frac{1}{x(x+1)} = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} > x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ge 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5 > 1{,}4,$$

и требуемое доказано.

Замечание. Вообще говоря, неверно, что число 1,4 можно заменить на 1,5.