Всероссийская олимпиада школьников по математике
2016 – 2017 учебный год
Муниципальный этап
Ответы 8 класс

1. Команда школьников из 4 человек принимала участие в городском турнире, который продолжался 5 часов, при этом в каждый момент времени задачи решали ровно двое членов команды. В конце турнира оказалось, что капитан команды решал задачи 3 часа, второй член команды – 2 часа, третий член – 1 час. Сколько часов решал задачи четвертый член команды?

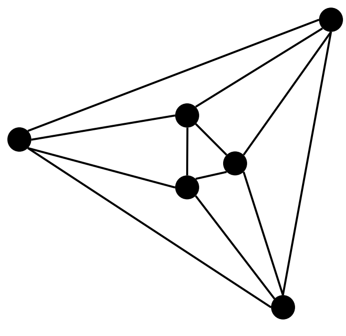
Ответ. 4 часа. ***Решение:*** Так как «в каждый момент времени задачи решали ровно двое членов команды», можно считать, что в течение 5 часов работало ровно два человека. То есть суммарное время работы всех членов команды должно быть равно $2\cdot5 = 10$ часов. Про троих известно, что их суммарное время работы равно $3+2+1 = 6$. Значит, четвертому остается 4 часа.

Критерии. Ответ без пояснений – 2 балла. Пример того, как решались задачи (например, «вначале задачи решали капитан и четвертый, через 3 часа вместо капитана стал решать второй, и т.д.…») дополнительных баллов не дает. Посчитано суммарное время работы всех членов команды – 3 балла.

2. Можно ли на плоскости отметить 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками (с концами в этих точках) так, чтобы из каждой точки выходило ровно по 4 отрезка? Два отрезка считаются непересекающимися, если они не имеют общих точек за исключением, возможно, концов этих отрезков.

Ответ. Можно. ***Решение:*** см. рисунок.

Критерии. Любой правильный (удовлетворяющий условиям задачи) рисунок – 7 баллов. Пояснений к рисунку не требуется. Неправильный рисунок – 0 баллов.



3. Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются под углом 60^0. Докажите, что один из углов треугольника равен 60^0.

Решение. Пусть дан ΔABC и биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M. Рассмотрим 2 случая: $\angle AMB=60^0$ и $\angle AMB=120^0$. В первом случае в ΔAMB $\angle MAB+\angle MBA=120^0$, значит в ΔABC $\angle CAB+\angle CBA=240^0$, что невозможно. Во втором случае в ΔAMB $\angle$ MAB $+\angle$ MBA $=60^0$, значит в ΔABC $\angle$ CAB $+\angle$ CBA $=120^0$, что дает нам $\angle ACB=60^0$, что и требовалось доказать.

Критерии. Правильно рассмотрен только случай $\angle AMB=120^0$ – 5 баллов.

4. Найдите наименьшее четырехзначное число, произведение всех цифр которого равно 512.

Ответ. 1888

Решение. $512=2^9$, значит все цифры числа являются степенью двойки, т.е. могут быть равны 1, 2, 4 или 8. Очевидно, первая цифра числа должна быть как можно меньше. Возьмем наименьшую из возможных, это 1. Остальные должны быть равны 8, иначе произведение будет меньше 512.

Критерии. Ответ без обоснования (что это число наименьшее) – 1 балл. Доказано, что цифрами числа могут быть только 1, 2, 4 или 8 – 3 балла.

5. Андрей задумал 4 целых числа и сообщил Ване все их попарные суммы. Ваня точно запомнил только 4 из них: 0, 3, 6 и 18. Про две оставшиеся суммы Ваня запомнил только то, что они были двузначными натуральными числами. Какие числа задумал Андрей?

Ответ. –6; 6; 9; 12.

Решение. Пусть были задуманы числа (в порядке возрастания) a; b; c; d. Учитывая, что две оставшиеся суммы – двузначные, минимальными суммами являются 0, 3 и 6. Значит, $a+b=0$; $a+c=3$, а также $a+d=6$ или $b+c=6$. Из первых двух уравнений находим $b=-a$; $c=3-a$. Получаем $b+c = -a+3-a = 3-2a$. Поскольку a – целое, b+c нечетно, то есть не может быть равно 6, значит $a+d=6$ и $d = 6-a$.

Из трех оставшихся сумм (b+c, b+d, c+d) одна должна быть равна 18.

$b+c = 3-2a$ – нечетно

$b+d = -a+6-a = 6-2a$ – четно

$c+d = 3-a+6-a = 9-2a$ – нечетно

Из трех сумм только одна четна, значит $b+d = 6-2a = 18$, откуда $a=-6$. Проверкой несложно убедиться, что две оставшиеся суммы действительно являются двузначными.

Критерии. Ответ без пояснений – 1 балл. Составлены уравнения $a+b=0$; $a+c=3$, дальнейших продвижений нет – 2 балла.