Муниципальный этап

Всероссийской олимпиады школьников

по математике Алтайский край

2016 – 2017 учебный год

Барнаул 2016

Сборник содержит материалы для проведения муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в Алтайском крае. Задания составлены члены предметно-методической комиссии муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников 2016/2017 учебного года олимпиады школьников по математике Саженков А.Н., Оскорбин Д. Н., Саженкова Т.В., Папин А.А. (Алтайский государственный университет).

Рекомендации по проверке олимпиадных работ

Любое правильное решение оценивается в 7 баллов.

Недопустимо снятие баллов за слишком длинное решение, или за решение школьника, отличающееся от приведенного в методических разработках.

Важно отметить, что исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) не являются основанием для снятия баллов

В то же время, любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Жюри рассматривает записи решений, приведенные в чистовике. Черновик рассматривается только в случае отсутствия решения в чистовике.

Каждая работа должна быть оценена двумя членами Жюри. В случае расхождения их оценок вопрос об окончательном определении баллов, выставляемых за решение указанной задачи, определяется председателем Жюри или назначенным им старшим по классу.

Критерии оценивания

7 баллов – Полное верное решение.

6-7 баллов – Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.

5-6 баллов – Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.

4 балла – Применять в исключительных случаях, с обязательным утверждением председателем Жюри или назначенным им старшим по классу.

2–3 балла – Задача не решена, но сделано существенное продвижение в решении задачи.

1 балл – Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

0 баллов – Решение неверное, продвижения в решении отсутствуют.

Особенности олимпиады 5-6-7 классов. Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 5-6-7 класса, не умеют чётко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 5-6-7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

9 класс

9.1. Когда у двух дробей с натуральными числителями и знаменателями поменяли числители местами, сумма дробей не изменилась. Докажите, что либо числители, либо знаменатели дробей равны.

Запишем условие в виде соотношения $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{b}+\frac{a}{d}$. Это соотношение равносильно соотношениям $ad + bc = cd + ab$ и $(d–b)(a–c) = 0$. Откуда и следует утверждение задачи.

9.2. В коробке лежат несколько (больше трёх) шариков. Каждый покрашен в какой-то цвет. Если достать из коробки любые три шарика, то среди них обязательно будет хотя бы один красный и хотя бы один синий. Сколько шариков может быть в коробке?

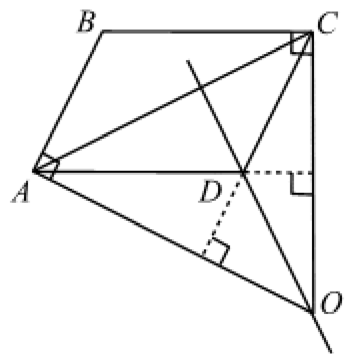
Ответ: 4. Решение. В коробке не больше, чем по два красных и синих шарика (иначе можно было бы достать три красных или три синих) и не больше одного шарика других цветов (иначе можно было бы достать один синий или красный шарик и два шарика других цветов). Получается, что шариков в коробке не больше пяти, причем если их пять, то среди них по два синих и красных и один – какого-то третьего цвета. Но тогда мы можем достать шарик третьего цвета и два синих. Значит, пяти шариков в коробке быть не может. Стало быть, их там четыре: два синих и два красных.

Комментарий. Ответ – 0 баллов, пример – 2 балла.

9.3. На 5 карточках написаны натуральные числа от 1 до 10 (каждое – ровно один раз, по одному на каждой стороне). Известно, что на каждой карточке одно из чисел делится на другое. Карточки выложены на стол так, что числа на верхних сторонах видны, а на нижних – нет. Можно ли однозначно определить, какие числа написаны у карточек на обороте?

Ответ: да, можно. Если на карточке написана семерка, то на обороте должна быть единица, потому что других чисел, делящих 7 или делящихся на 7, среди чисел от 1 до 10 нет. На обороте карточки, где написана пятерка, могут быть только 1 или 10, но единица занята, поэтому там десятка. На обороте карточки с девяткой могут быть только 1 или 3, поэтому там 3. Остались числа 2, 4, 6, 8. Из них на обороте карточки с шестеркой может быть только двойка. Значит, на обороте карточки с восьмеркой — четверка. Таким образом, числа на обороте карточек однозначно восстанавливаются по числам на их лицевой стороне.

9.4. Через вершину D параллелограмма $ABCD$ проведена прямая l, перпендикулярная диагонали AC. Докажите, что перпендикуляры к прямым AB и BC, проведенные через точки A и C, пересекаются на прямой l.



Пусть O – точка пересечения перпендикуляров к прямым AB и BC, проведенных через точки A и C. Тогда прямые AD и CD содержат высоты треугольника AOC. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, прямая OD также содержит высоту треугольника AOC, то есть перпендикулярна AC. Поскольку перпендикуляр из точки к прямой единственен, прямая OD совпадает с l, отсюда и следует утверждение задачи.

9.5. В центральной клетке квадрата 7×7 стоит фишка. Два игрока по очереди передвигают эту фишку на соседнюю по стороне клетку. Первый может продвинуть фишку в том же направлении, в котором был сделан предыдущий ход вторым игроком, или повернуть налево, а второй – продвинуть в том же направлении первым игроком или повернуть направо. Первый игрок начинает ходом в произвольном направлении. Проигрывает игрок, не имеющий хода. Может ли первый игрок обеспечить себе победу?

Ответ: нет, не может. Понятно, что выиграть может только тот игрок, который своим ходом поставит фишку в угол. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. С каждым ходом цвет поля, на котором стоит фишка, меняется. Поскольку все угловые клетки доски 7×7 – того же цвета, что и центральная, поставить фишку в угол может только игрок, ходящий на поля черного цвета, то есть второй игрок.