9 класс

Задача 1. Докажите, что куб любого составного числа может быть представлен как разность двух квадратов натуральных чисел минимум тремя различными способами.

Решение. Для любого натурального n верен следующий способ. $n^3 = a^2–b^2 = (a+b)(a–b)$. Пусть $a+b = n^2$, $a–b = n$, тогда, сложив эти два равенства, получаем, что $2a = n^2+n$, а вычтя, получаем, что $2b = n^2+n$. Отсюда $n^3 = \frac{n^2+n}{2}^2 - \frac{n^2-n}{2}^2$. Заметим, что если n нечетно, то можно сделать так $a+b = n^3$, $a–b = 1$, $n^3 = \frac{n^3+1}{2}^2 - \frac{n^3-1}{2}^2$. Кроме того, $n = km$, k и m оба нечетны, тогда $a+b = k^3$, $a–b = m^3$, $n^3 = \frac{k^3+m^3}{2}^2 - \frac{k^3-m^3}{2}^2$. Докажем, что все три способа – разные, так как в каждом способе сумма $a+b$ различная.

Пусть n четно, $n = 2k$. Тогда второй способ разложения можно получить из равенств $a+b = 4k^3$, $a–b = 2$, $8k^3=(2k^3+1)^2–(2k^3–1)^2$, а третий способ можно получить из равенств $a+b = 2k^3$, $a–b = 4$, $8k^3=(k^3+2)^2–(k^3–2)^2$. Все три способа различны по причину, указанной выше.

Задача 2. На доске написано 2017 цифр. Из них составили несколько чисел, вычислили суммы цифр этих чисел, а затем из суммы всех чисел вычли сумму сумм их цифр. Полученное число разбили на цифры, и снова повторили указанную выше операцию. После того, как эту операцию выполнили несколько раз, на доске впервые осталась только одна цифра. Что это за цифра?

Решение. Так как разность числа и суммы цифр числа делится на 9, то при первом же прогоне операции мы получаем число, кратное 9. Причём, если взять сумму нескольких чисел и из неё вычесть сумму цифр этих чисел, то результат также будет кратен 9. Продолжая вычисления, мы будем получать числа, кратные 9, но уменьшающиеся по абсолютной величине. В итоге, первое однозначное число, которое мы получим, должно делиться на 9,а это только 9.

Задача 3. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие равное число знакомых в этой компании. Если *A* знаком с *B*, то *B* знаком с *A*.

Решение. Пусть в компании k человек. Тогда каждый из них имеет в этой компании не меньше нуля и не больше k-1 знакомых. Если предположить, что количества знакомых у всех людей различны, то получится противоречие. Действительно, тогда один имеет нуль знакомых, второй – одного, третий – двух и так далее. Последний имеет *k-1* знакомых. Но это значит, что последний знаком со всеми, в частности, с первым, а тот ни с кем не знаком.

Задача 4. Докажите, что в каждом девятиугольнике существует пара диагоналей, угол между которыми меньше 7^{O}.

Решение. Каждый девятиугольник имеет $\frac{9\cdot 6}{2}$=27 диагоналей, так как из каждой вершины выходит 6 диагоналей. Проведём через произвольную точку *O* плоскости 27 прямых, параллельных диагоналям девятиугольника. Эти прямые разбивают полный угол 360^{O} вокруг точки *O* на 54 части. Очевидно, что наименьший из полученных углов не превосходит $\frac{360^{o}}{54} < 7^{o}$.

Поскольку при параллельном переносе прямых угол между ними не изменяется, то острый угол между соответствующей парой диагоналей также не превосходит 7^{o}, что и требовалось доказать.

Задача 5. В треугольнике *ABC* проведена медиана *BM.* Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник *BCM,* быть в два раза меньше радиуса окружности, вписанной в треугольник *ABC?*

Решение. *1 способ.* Из формулы $S = rp$ и равенства *S(BMC)* = $\frac{1}{2}S\ ABC$ следует, что периметры треугольников *BMC* и *ABC* равны. Но P(ABC)= AB+BC+CA=AB+BC+CM+MA=(AB+AM)+BC+CM>BM+BC+CM= P(BCM).

2 способ. Построим треугольник *ADC,* в котором *BM* – средняя линия. Он подобен треугольнику *MBC* с коэффициентом 2, т.е. радиус r_2 вписанной в него окружности равен 2 r_1, где r_1 – радиус окружности, вписанной в треугольник *BCM.* Но $r_2 > r$, где r – радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC.*