# УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

## 9 класс

**1.** При каком наименьшем натуральном $k$ число $2016 \cdot 20162016 \cdot 201620162016 \cdot \ldots \cdot 20162016\ldots2016$ ($k$ множителей) делится без остатка на $3^{67}$?

**2.** Каждое из уравнений $ax^2 - bx + c = 0$ и $cx^2 - ax + b = 0$ имеет по два различных действительных корня. Сумма корней первого уравнения неотрицательна, а произведение корней первого уравнения в 9 раз больше суммы корней второго уравнения. Найдите отношение суммы корней первого уравнения к произведению корней второго уравнения.

**3.** В парламенте некоторого государства 2016 депутатов, которые делятся на 3 фракции: «синих», «красных» и «зеленых». Каждый из депутатов или всегда говорит правду, или всегда лжёт. Каждому из депутатов задали по три следующих вопроса.

1) Входите ли вы в фракцию «синих»?
2) Входите ли вы в фракцию «красных»?
3) Входите ли вы в фракцию «зеленых»?

На первый вопрос утвердительно ответили 1208 депутатов, на второй вопрос утвердительно ответили 908 депутатов, а на третий вопрос утвердительно ответили 608 депутатов. В какой фракции депутатов, которые лгут, больше, чем депутатов, которые говорят правду, и на сколько?

**4.** В треугольник $ABC$ вписана окружность. На наибольшей стороне треугольника $AC$ отметили две точки $E$ и $F$ так, что $AE = AB$, а $CF = CB$. Отрезок $BE$ пересекает вписанную окружность в точках $P$ и $Q$, причем $BP = 1$, $PQ = 8$. Чему равна длина отрезка $EF$?

**5.** На координатной плоскости отметили произвольным образом 2017 точек с целочисленными координатами $(x, y)$, причем $1 \le x \le 2016$ и $1 \le y \le 2016$. Докажите, что всегда найдутся два различных отрезка с концами в этих точках, имеющих одинаковую длину.

*Составитель ИсаевК.П.*

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
|---|---|
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## 9 класс

**1.** При каком наименьшем натуральном $k$ число $2016 \cdot 20162016 \cdot 201620162016 \cdot \ldots \cdot 20162016\ldots2016$ ($k$ множителей) делится без остатка на $3^{67}$?

**Решение**.

Покажем, что в случае 27 множителей, произведение делится на $3^{67}$, но не делится на $3^{68}$.

$$2016 \cdot 20162016 \cdot \ldots \cdot \underbrace{20162016\ldots2016}_{27\ раз} =$$

$$= 2016^{27} \cdot (1 \cdot 1001 \cdot 1001001 \cdot \ldots \cdot \underbrace{1001001\ldots1001}_{27\ единиц}) =$$

$$= 3^{54} \cdot 244^{27} \cdot (1001 \cdot 1001001 \cdot \ldots \cdot \underbrace{1001001\ldots1001}_{27\ единиц}).$$

$244$ не делится на 3.

$\underbrace{1001001\ldots1001}_{k\ единиц}$ не делится на 3, если $\overline{k \vdots 3}$.

$\underbrace{1001001\ldots1001}_{k\ единиц} \vdots 3$, но не делится на $9 = 3^2$, если

$k=3,6,12,15,21,24$. Их произведение делится на $3^6$.

$\underbrace{1001001\ldots1001}_{9\ единиц}=1001001\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{8\ нулей}1\underbrace{0\ldots0}_{8\ нулей}1\vdots3^2$, но не делится на $3^3$.

$\underbrace{1001001\ldots1001}_{18\ единиц}=\underbrace{1001001\ldots1001}_{9\ единиц}\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{26\ нулей}1\vdots3^2$, но не делится на $3^3$.

$\underbrace{1001001\ldots1001}_{27\ единиц}=\underbrace{1001001\ldots1001}_{9\ единиц}\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{26\ нулей}1\underbrace{0\ldots0}_{26\ нулей}1\vdots3^3$, но не делится на $3^4$.

54+6+2+2+3=67.

$2016\cdot20162016\cdot\ldots\cdot\underbrace{20162016\ldots2016}_{27\ раз}\vdots3^{67}$, но не делится на $3^{68}$.

Ответ: 27

**Рекомендации по проверке.**

Ответ без доказательства – 0 баллов.

Доказано, что, $2016\cdot20162016\cdot\ldots\cdot\underbrace{20162016\ldots2016}_{27\ раз}\vdots3^{67}$ - 5 баллов.

**2.** Каждое из уравнений $ax^2-bx+c=0$ и $cx^2-ax+b=0$ имеет по два различных действительных корня. Сумма корней первого уравнения неотрицательна, а произведение корней первого уравнения в 9 раз больше суммы корней второго уравнения. Найдите отношение суммы корней первого уравнения к произведению корней второго уравнения.

**Решение.**

Из условия, следует, что коэффициенты $a, c\neq0$.

По теореме Виета из условия следует, что $\frac{c}{a}=9\frac{a}{c}$. Откуда $c^2=9a^2$, то есть $\left[\begin{array}{l}c=3a,\\ c=-3a.\end{array}\right.$

1 случай.

$c=3a$.

Получим уравнения $ax^2-bx+3a=0$ и $3ax^2-ax+b=0$.

По условию $\frac{b}{a}\geq0,\ b^2-12a^2>0,\ a^2-12ab>0.$

То есть $\frac{b}{a} \geq 0, \frac{b^2}{a^2} > 12, 1 - 12\frac{b}{a} > 0.$ Сделав замену $\frac{b}{a} = t$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 > 12, \\ t < \frac{1}{12}, \end{cases}$$

которая не имеет решений. Значит, первый случай не возможен.

2 случай.

$c = -3a$.

Получим уравнения $ax^2 - bx - 3a = 0$ и $-3ax^2 - ax + b = 0$.

По условию $\frac{b}{a} \geq 0, b^2 + 12a^2 > 0, a^2 + 12ab > 0.$

Эти неравенства выполняются при любых $a$ и $b$, таких что $\frac{b}{a} \geq 0.$

Сумма корней первого уравнения равна $\frac{b}{a}.$ Произведение корней второго уравнения равно $-\frac{b}{3a}.$ Отношение равно -3.

Ответ: -3.

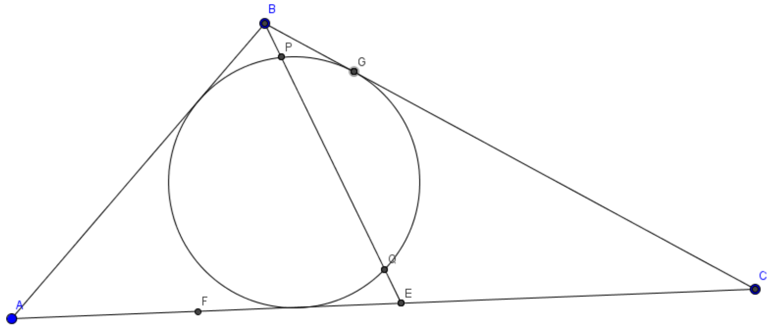
**Рекомендации по проверке.**

Найдено только значение 3 – 2 балла.

Найдены значения $\pm 3$ – 3 балла.

**3.** В треугольник $ABC$ вписана окружность. На наибольшей стороне треугольника $AC$ отметили две точки $E$ и $F$ так, что $AE = AB$, а $CF = CB$. Отрезок $BE$ пересекает вписанную окружность в точках $P$ и $Q$, причем $BP = 1$, $PQ = 8$. Чему равна длина отрезка $EF$?

**Решение.**




Обозначим стороны треугольника $AB = c,\ AC = b,\ BC = a.$ Тогда $EF = a + c - b.$

Пусть $G$ - точка касания вписанной окружности и стороны $BC.$ Тогда $BG^2 = BQ \cdot BP = 9.$ Следовательно, $BG = 3.$

Но так как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки равны, то $2BG + 2b = a + b + c.$

Следовательно, $a + c - b = 2BG = 6.$

Ответ: 6.

**4.** В парламенте некоторого государства 2016 депутатов, которые делятся на 3 фракции: «синих», «красных» и «зеленых». Каждый из депутатов или всегда говорит правду, или всегда лжёт. Каждому из депутатов задали по три следующих вопроса.

1) Входите ли вы в фракцию «синих»?
2) Входите ли вы в фракцию «красных»?
3) Входите ли вы в фракцию «зеленых»?

На первый вопрос утвердительно ответили 1208 депутатов, на второй вопрос утвердительно ответили 908 депутатов, а на третий вопрос утвердительно ответили 608 депутатов. В какой фракции депутатов, которые лгут, больше, чем депутатов, которые говорят правду, и на сколько?

**Решение.**

Обозначим количество депутатов, говорящих правду во фракциях «синих», «красных» и «зеленых», $r_1, r_2$ и $r_3$ соответственно, а количество депутатов, говорящих ложь во фракциях «синих», «красных» и «зеленых», $l_1, l_2$ и $l_3$ соответственно.

По условию задачи:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + l_1 + l_2 + l_3 = 2016, \\ r_1 + l_2 + l_3 = 1208, \\ r_2 + l_1 + l_3 = 908, \\ r_3 + l_1 + l_2 = 608. \end{cases}$$

Пусть $l_1 - r_1 = a, l_2 - r_2 = b, l_3 - r_3 = c.$

Вычитая из второго уравнения системы третье, получим $b - a = 300.$ Или $a = b - 300.$

Вычитая из третьего уравнения системы четвертое, получим $c - b = 300.$ Или $c = b + 300.$

Вычитая из суммы второго, третьего и четвертого уравнения первое уравнение, получим

$l_1 + l_2 + l_3 = 708$. Откуда, $r_1 + r_2 + r_3 = 1308.$

Тогда $a + b + c = -600.$ Или $3b = -600.$

Итак, $b = -200, a = -500, c = 100.$ То есть лжецов больше во фракции «зеленых» на 100 человек.

Ответ: во фракции «зеленых» на 100 человек.

**Рекомендации по проверке.**

Правильно составлена математическая модель задачи – 3 балла.

**5.** На координатной плоскости отметили произвольным образом 2017 точек с целочисленными координатами $(x, y)$, причем $1 \le x \le 2016$ и $1 \le y \le 2016$. Докажите, что всегда найдутся два различных отрезка с концами в этих точках, имеющих одинаковую длину.

**Решение.**

Количество различных отрезков с концами в заданных 2017 точках равно $\dfrac{2016 \cdot 2017}{2} = 2033136.$

Длина любого такого отрезка равна $\sqrt{a^2+b^2}$, где $a$ и $b$ - целые числа из отрезка $[0,2015]$.
Будем считать, что $a \geq b$.
При $a = 2015, b \in [0,2015] - 2016$ значений.
При $a = 2014, b \in [0,2014] - 2015$ значений.
…
При $a = 1, b \in [0,1] - 2$ значения.
$a = 0, b = 0$ не подходит.
Тогда всего различных длин не больше, чем
$2+3+\ldots+2016 = 2033135$.
Значит, какие-то два отрезка имеют одинаковую длину.