

## 9 класс

**1. Ответ.** Может:  $a = 1008$  и  $b = -1008$ .

**Решение.** Если числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют равенству  $a^{2016} = b^{2016}$ , то  $a = b$  либо  $a = -b$ . Первый случай невозможен, так как  $a > b$ . Если  $a = -b$ , то из условия задачи получаем  $2a = 2016$ , откуда  $a = 1008$  и  $b = -1008$ .

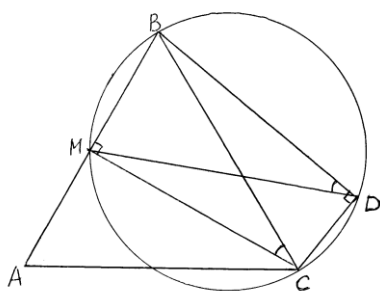
**2. Решение.** Найдем  $f(1) = a + b + c$ ,  $f(2) = 4a + 2b + c$ ,  $f(3) = 9a + 3b + c$ . По условию  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$  делятся на 3, поэтому и  $f(1) + f(2) + f(3) = 14a + 6b + 3c$  будет делиться на 3, откуда следует, что число  $a$  кратно 3 (в силу того, что 14 и 3 взаимно просты). Далее  $f(2) - f(1) = 3a + b$  делится на 3, тогда и  $b$  делится на 3. Наконец, из равенства  $f(3) = 9a + 3b + c$  следует, что  $c$  кратно 3. Следовательно, в квадратном трехчлене  $f(x) = ax^2 + bx + c$  все коэффициенты делятся на 3, поэтому при любом целом  $x$   $f(x)$  будет также делиться на 3.

**3. Ответ.** Можно.

**Решение.** По первой команде оставим школьника с номером 5 на месте, а следующие номера меняются местами: 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6. Тогда получим расположение 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. По второй команде оставим на месте номер 9, а номера 8 и 1, 7 и 2, 6 и 3, 5 и 4 меняются местами. Тогда получим требуемое расположение 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

**4. Ответ.**  $30^\circ$ .

**Решение.**



Построим окружность с диаметром  $BC$ . Тогда точки  $D$  и  $M$  будут лежать на этой окружности как вершины прямых углов, опирающихся на диаметр. Углы  $BDM$  и  $BCM$  – вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу  $BM$ . Следовательно,  $\angle BDM = \angle BCM = 30^\circ$ .

**5. Ответ.** Обе хозяйки потратили одинаковую сумму денег, при этом вторая хозяйка за месяц купила больше молока.

**Решение.** Пусть  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 30$ ) – цена молока за 1 литр. По условию

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{30}}{30} = 20.$$

Тогда первая хозяйка потратила  $a_1 + a_2 + \dots + a_{30} = 30 \cdot 20 = 600$  рублей, вторая  $20 \cdot 30 = 600$  рублей. Таким образом, обе хозяйки потратили одинаковую сумму денег.

Первая хозяйка за месяц купила 30 литров молока, вторая

$$\frac{20}{a_1} + \frac{20}{a_2} + \dots + \frac{20}{a_{30}} = S.$$

Из равенства  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{30}}{30} = 20$  следует

$$\frac{a_1}{20} + \frac{a_2}{20} + \dots + \frac{a_{30}}{20} = 30.$$

$$\text{Тогда } S + 30 = \left(\frac{20}{a_1} + \frac{a_1}{20}\right) + \left(\frac{20}{a_2} + \frac{a_2}{20}\right) + \dots + \left(\frac{20}{a_{30}} + \frac{a_{30}}{20}\right) \geq 2 \cdot 30,$$

откуда получаем  $S \geq 30$ .

Так как равенство возможно лишь в случае, когда все числа равны между собой, то получим  $S > 30$ . Следовательно, вторая хозяйка за месяц купила больше молока.