Департамент образования Ярославской области
Всероссийская олимпиада школьников 2016/2017 учебного года

Математика, 9 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

Каждая задача оценивается из 7 баллов *в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией по математике.*
Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.
Если решения нет, то независимо от продвижения, ставить не более 3 баллов.
Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. У каких одиннадцати последовательных целых чисел сумма шести первых чисел равняется сумме пяти последних?

Ответ: 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35.

Решение:

Других решений нет, т.к. при сдвиге этих значений по числовой прямой на k единиц сумма первых шести чисел изменяется на $6k$, а последних пяти – на $5k$.

Как можно найти это решение? Сначала просуммируем первые 6 чисел (от 1 до 6) и следующие 5 чисел (от 7 до 11). Суммы не окажутся равными, но их разность укажет на сдвиг всех чисел по числовой прямой. Каждый такой сдвиг на одну единицу уменьшает разность найденных сумм на 1.

Возможен другой вариант решения, одновременно позволяющий и найти нужный набор, и обосновать его единственность:

Пусть первое число в этой последовательности равно x.
Тогда имеем такие числа:
$x \quad x+1 \quad x+2 \quad x+3 \quad x+4 \quad x+5 \quad x+6 \quad x+7 \quad x+8 \quad x+9 \quad x+10$
Сумма первых шести равна $5x + 15$, сумма последних пяти равна $6x + 40$.

По условию эти суммы равны: $5x + 15 = 6x + 40$, откуда $x = 25$ (и искомые 11 чисел: 25, 26, …, 35).

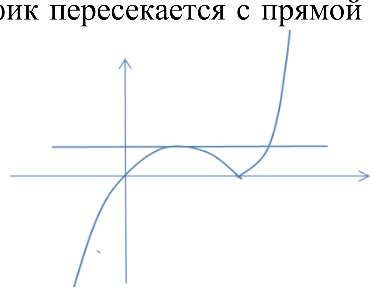
<u>Указания по проверке:</u>
Ответ без обоснования, что других чисел нет, – 3 балла.

2. При каких a уравнение $x \cdot |x - a| = 1$ имеет три различных решения?

<u>Ответ:</u> $a > 2$.

Решение:
Будем строить график функции $y = x\,|x - a|$ и искать количество точек пересечения с горизонтальной прямой $y = 1$ при различных значениях параметра (точнее, выясним, при каких значениях параметра будет три точки пересечения).

При $a = 0$ функция $y = x\,|x - a|$ ($y = x\,|x|$) строго возрастает, график пересекается с прямой $y = 1$ в единственной точке.



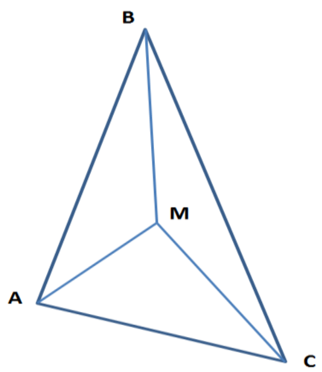
При $a > 0$ построим график функции $y = x\,|x - a|$ – схематично он изображен на рисунке справа. Прямая $y = 1$ пересекает этот график в трёх точках только в случае, если вершина параболы $(a/2,\ a^2/4)$ лежит выше неё.
Значит, $a^2/4 > 1$. Отсюда при $a > 0$ получаем ответ: $a > 2$.

Аналогично рассматриваются значения $a < 0$ (график симметричен рассмотренному выше относительно начала координат), для них прямая $y = 1$ имеет только одну точку пересечения с графиком функции $y = x\,|x - a|$.

<u>Указания по проверке:</u>
Ответ без обоснования – 3 балла.
Если пропущен случай a = 0, то 3 балла.
Если случай a = 0 разобран как часть какого-то другого случая (например, a ≤ 0), то он, естественно, пропущенным не считается.

3. Точка в треугольнике соединена с вершинами тремя отрезками. Какое наибольшее число этих отрезков может равняться противоположной стороне?

<u>Ответ:</u> Один.



Решение:
Пусть $BM = AC$ и $AB = MC$ (см. рис.). Треугольники ABM и MCA равны по трем сторонам. Отсюда, угол BAM равен углу AMC, а значит, $AB \parallel MC$.
Аналогично, $AC \parallel MB$.
Получается, что $ABMC$ – параллелограмм, но это не так, потому что угол BMC, лежащий в этом параллелограмме, больше развернутого.

Комментарий по трактовке условия:

Слова «Точка в треугольнике» предполагают «внутри треугольника». Правда, решение остается верным и для точки М на границе треугольника. Если точка М выбрана в вершине, то считаем, что это не соответствует условию задачи («Точка в треугольнике соединена с вершинами тремя отрезками» – если точка попала в вершину, то отрезок получается вырожденным).

Иначе говоря, по умолчанию предполагается, что точка выбрана строго внутри треугольника.

4. В куче 2016 камней. Играют два игрока. Первый каждым своим ходом может взять либо 1, либо 3, либо 4 камня. Второй каждым своим ходом может взять либо 1, либо 2, либо 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ: Второй.

Решение:

Стратегия второго игрока: каждый раз оставлять в куче количество камней, дающее остаток 2 при делении на 3. Заметим, что он может это сделать после любого хода соперника, т.к. набор его ходов позволяет изменять остаток оставшихся камней на любое значение. Первый при таком количестве оставшихся камней закончить игру не может, значит, последний ход останется за вторым.

Задача допускает вариант решения, не требующий соблюдения неочевидной стратегии второго игрока «делать остаток от деления на 3 равным 2» с самого начала игры:

Рассмотрим следующую стратегию (за второго игрока).

Основная идея решения: легко видеть, что если перед первым игроком оставить ровно 2 камня, то он (первый игрок) проиграет, а победу одержит второй. Действительно, из кучи в 2 камня первый может взять только один, но тогда оставшийся камень берёт соперник (второй) и побежает.

Разберём действия второго игрока в зависимости от того, сколько камней находится в куче перед его ходом.

- Если в куче 1, 2 или 3 камня, то второй победил (он просто берёт все камни своим ходом).
- Если в куче 4 или 5 камней, то второй своим ходом берет 2 или 3 камня соответственно, оставляя первому игроку кучу из 2 камней (а в этом случае первый проигрывает).
- Если в куче 6, 7 или 8 камней, то второй своим ходом берёт 1, 2 или 3 камня соответсвенно, оставляя первому кучу из 5 камней. После этого сколько бы камней не взял первый, в куче останутся камни (то есть теперь ход второго), причём их будет меньше пяти. Но если перед вторым лежит меньше 5 камней, то второй выигрывает (стратегия была рассмотрена выше).
- Если в куче больше 8 камней, то просто берём любое количество камней.

Иначе говоря, второй игрок в начале игры делает ходы как угодно – до тех пор, пока камней (перед его ходом) не останется 8 или меньше. Этот момент наступит, так как после пары ходов (первого и второго) количество камней уменьшается не менее чем на 2 и не более чем на 7 (то есть, второй игрок не пропустит наступление ситуации, в которй будет играть по осмысленной стратегии).

Указания по проверке:
Внимательно следить за обоснованием выигрышности стратегии второго игрока и обоснованием возможности для второго сделать очередной ход.

5. Пусть $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Сколько квадратов целых чисел среди чисел $p(1)$, $p(2)$, …, $p(2016)$?

Ответ: 32.

Решение:
Заметим, что $p(x) = (x - 1)^2 (2x + 1)$.
При целом x ($1 \le x \le 2016$) число $p(x) = (x-1)^2(2x+1)$ является квадратом целого или при $x = 1$ ($p(1) = 0$), или (при $x \ge 2$) тогда, когда квадратом целого является число $2x + 1$.
Отметим, что при $x \ge 2$ верно неравенство: $5 \le 2x+1 \le 4033$, а также что $2x + 1$ нечетно.
Такими квадратами являются числа 9 (при $x = 4$), 25 (при $x = 12$), 49 (при $x = 24$) и т.д. до $63^2 = 3969$ (при $x = 1984$) – то есть, мы рассмотрели квадраты нечётных чисел от 3^2 до 63^2 (всего их 31). Вместе с ранее найденным квадратом при $x = 1$ получаем 32 точных квадрата среди чисел указанного вида.