

11 класс

Задача 1. Известно, что для некоторых натуральных чисел a, b число a^4+a^3+1 нацело делится на $a^2b^2+ab^2+1$. Найдите, чему равна разность $a-b$.

Задача 2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. За одну операцию его можно заменить либо трёхчленом $2x + 1$ ² · $f \frac{1}{2x+1}$, либо трёхчленом $3x - 1$ ² · $f \frac{1}{3x-1}$. Можно ли такими операциями получить из трёхчлена $x^2 - 2017x + 2016$ трёхчлен $x^2 - 2016x + 2017$?

Задача 3. Внутри квадрата со стороной 1 расположены несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что существует прямая, пересекающая хотя бы 4 из этих окружностей.

Задача 4 . (Н. Агаханов) Основания трех высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан противоположных граней. Докажите, что все рёбра пирамиды равны.

Задача 5. (И. Богданов) На острове живут 2016 человек, каждый - либо рыцарь, либо лжец, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Некоторые из жителей знакомы (если A знаком с B , то B знаком с A). Каждый житель острова, кроме президента, сделал два утверждения: «Я знаю чётное число рыцарей» и «Я знаю нечётное число лжецов». Докажите, что президент должен сделать такие же утверждения. (Президент входит в число жителей острова.)