10 класс

1. Существует ли пара, неравных друг другу целых чисел a, b, для которых справедливо равенство

$$\frac{a}{2015}+\frac{b}{2016}=\frac{2015+2016}{2015\cdot 2016}.$$

Если такой пары не существует, то обоснуйте. Если такая пара существует, то приведите пример.

2. В парламенте некоторого государства 2016 депутатов, которые делятся на 3 фракции: «синих», «красных» и «зеленых». Каждый из депутатов или всегда говорит правду, или всегда лжёт. Каждому из депутатов задали по три следующих вопроса.

1) Входите ли вы в фракцию «синих»?
2) Входите ли вы в фракцию «красных»?
3) Входите ли вы в фракцию «зеленых»?

На первый вопрос утвердительно ответили 1208 депутатов, на второй вопрос утвердительно ответили 908 депутатов, а на третий вопрос утвердительно ответили 608 депутатов. В какой фракции депутатов, которые лгут, больше, чем депутатов, которые говорят правду, и на сколько?

3. В настоящее время курс доллара и евро представлен так: D=6 юаней и E=7 юаней. Народный банк Китая определяет курс юаня вне зависимости от состояния рынка. И придерживается тактики примерного равенства валют. Один работник банка предложил руководству следующую схему изменения курса. За один год курс разрешается менять по следующим четырем законам. Либо менять D и E на пару (D+E, 2D ± 1), либо на пару (D+E, 2E ± 1). Причем запрещается единовременное равенство курсов доллара и евро.

Например: Из пары (6, 7) через один год можно сделать следующие пары: (13, 11), (11,13), (13,15) или (15,13). Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных единовременных курсов через 101 год.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. Из оснований высот BM и CN проведены перпендикуляры ML к NC и NK к BM. Найдите угол при вершине A, если известно отношение KL:BC=3:4.

5. Последовательность чисел $a_1,a_2,\ldots, a_{2016}$, - геометрическая прогрессия, а последовательность $b_1,b_2,\ldots,b_{2016}$ - арифметическая прогрессия. Известно, что среди всех квадратных трехчленов $P_i(x)=x^2+a_i x+b_i$, i =1,…,2016 только один квадратный трехчлен $P_k(x)$ имеет действительные корни. Найдите все возможные значения k.