10 класс

1. Прямая дорога проходит недалеко от горы Фудзияма. Водитель автомобиля заметил гору в 60 км к северу, а через час – в 45 км к западу. На каком наименьшем расстоянии от Фудзиямы проехал автомобиль?

Ответ: 36 км.
Решение: Гора и точки наблюдения находятся в вершинах прямоугольного треугольника с катетами 60 и 45. Гипотенуза при этом равна 75. Приравнивая по-разному подсчитанные площади треугольника, получаем, что произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту, равную искомому расстоянию.
Отсюда, $60 \cdot 45 = 75 \cdot x \Rightarrow x = 36$.
Критерии оценки. Только ответ – 1 балл. Ответ с рисунком прямоугольного треугольника и высотой – 2 балла.

2. В этом году сыну и дочери столько лет, что произведение их возрастов в 7 раз меньше возраста отца. А через три года произведение их возрастов уже будет равно возрасту отца. Найти возраст отца.

Ответ: 21 год.
Решение. Пусть n – возраст сына, m – возраст дочери, тогда возраст отца равен $7mn$. Через три года возраст сына будет $n + 3$, возраст дочери будет $m + 3$, а возраст отца будет $7mn + 3$, причем по условию будет выполнено равенство $(n + 3)(m + 3) = 7mn + 3$. После приведения подобных членов и сокращения на 3 получим: $2mn – n – m = 2$. Умножим последнее равенство на 2 и представим его в виде: $(2m – 1)(2n – 1) = 5$.
Таким образом, $2m – 1 = 5$, $2n – 1 = 1$ (или наоборот), поэтому $m = 3$, $n = 1$ и, значит, $7mn = 21$. То есть сейчас сыну и дочери 1 год и 3 года (или наоборот), а отцу – 21 год.

3. Даны такие различные числа $a,b,c,d,$ что график функции $f(x) = x^2 + bx + a$ не пересекает ось абсцисс, а для функции $g(x) = x^2 + cx + d$ выполняется условие: $g(a) = b,\quad g(b) = a.$ Доказать, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

Решение.
1) Так как $f(x) = x^2 + bx + a$ не пересекает ось абсцисс, то уравнение $x^2 + bx + a = 0$ не имеет корней, то есть $D = b^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow 0 \le b^2 < 4a \Rightarrow a > 0$.
2) Из условия $g(a) = b,\quad g(b) = a$ получаем: $a^2 + ca + d = b$ и $b^2 + cb + d = a$. Вычитая из первого равенства второе, получаем:
$a^2 - b^2 + ca - cb = b - a \Leftrightarrow (a - b)(a + b) + c(a - b) = b - a$. Так как числа a и b

различны, то $a - b \neq 0$. Следовательно,
$(a-b)(a+b)+c(a-b)=b-a \Leftrightarrow a+b+c=-1$.

3) Рассмотрим функцию $h(x)=ax^2+bx+c$. Из (1) и (2) следует, что $a>0$ и $h(1)=a+b+c=-1<0$. А это означает, что график квадратичной функции имеет две точки пересечения с осью абсцисс.

Критерии оценки. Получено условие $a>0$ – 1 балл.
Получено, что $a+b+c=-1$, но не доказано, что $a>0$ –4 балла.

4. Прямоугольный треугольник ABC (катет BC больше катета AC) вписан в окружность. На стороне BC выбрана такая точка D, что $BD = AC$, точка M – середина дуги ACB. Найдите угол CDM.

Ответ: 45^0.

Решение. Заметим, что AB – диаметр описанной окружности. Соединим точку M с точками A, B, C, и D. Так как дуги AM и BM равны, то равны и хорды AM и BM, которые их стягивают. Отрезки BD и AC равны по условию. Наконец, углы MBC и MAC равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Таким образом, треугольники MBD и MAC равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует равенство сторон MD и MC, а значит, треугольник MCD – равнобедренный. Остается заметить, что
$\angle MCD = \angle MCB = \angle MAB = 45^0$, так как дуга MB равна половине окружности.

Критерии оценки. Доказательство равенства треугольников MBD и MAC – 3 балла.

5. Даны 700 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 2017. Доказать, что какие-то два из них отличаются или на 3, или на 4, или на 7.

Решение. Пусть $S_1=\{n_1,n_2,...,n_{700}\}$ есть множество данных чисел. Обозначим $S_2=\{n_1+3,n_2+3,...,n_{700}+3\}$, $S_3=\{n_1+7,n_2+7,...,n_{700}+7\}$. Пусть $S=S_1\bigcup S_2\bigcup S_3$. Числа множества S не превосходят 2024. Если предположить, что множества S_1,S_2,S_3 попарно не пересекаются, то множество S содержит не менее 2100 различных чисел, не превосходящих 2024, что невозможно. Следовательно, либо $S_1\bigcap S_2\neq \acute{\emptyset}$, либо $S_2\bigcap S_3\neq \acute{\emptyset}$, либо $S_1\bigcap S_3\neq \acute{\emptyset}$. В первом случае на множестве S_1 найдутся два числа, отличающиеся на 3, во втором – в S_1 найдутся два числа, отличающиеся на 4, в третьем случае найдутся два числа, отличающиеся на 7.