**Ключи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике**
**2017-2018 учебный год**
***10 класс***
*Максимально возможное количество баллов за каждое задание: 7 баллов*
*Максимально возможное количество баллов за работу: 35 баллов*

**Критерии оценивания заданий:**

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
|---|---|
| **7** | Полное верное решение. |
| **6-7** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| **5-6** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка. |
| **2-3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **0-1** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| **0** | Решение отсутствует. |

**Задача 1.** Два бегуна, стартовав одновременно, с постоянными скоростями, бегут по кольцевой дорожке в противоположных направлениях. Один из них пробегает кольцо за 5 минут, а второй – за 8 минут. Найти число различных точек встречи бегунов на дорожке, если они бегали не менее часа.

***Ответ:*** 13 точек.

***Решение.***

Пусть длина дорожки равна S метров. Тогда скорость бегунов равна соответственно S/5 и S/8 метров в минуту.

1. Предположим, что бегуны стартуют из одной точки. Тогда они встретятся снова через S/(S/5 + S/8) = 40/13 минут.

Выясним теперь, через какое время они снова встретятся в точке старта. Если при этом первый пробежит кольцевую дорожку n раз, а второй – m раз, то, сравнив время, получим 5n = 8m, n = 8a, m=5b, где a, b – натуральные числа. Наименьшие возможные значения a и b равны 8 и 5 соответственно. Следовательно, в точку старта они снова впервые попадут одновременно через 5·8=40 минут. Каждые 40/13 минут они встречаются на дорожке. Всего получится 40: (40/13) = 13 различных точек встречи.

2. Если они стартуют из разных точек, то они встретятся не более, чем через 40/13 минуты. Далее события будут развиваться аналогично п.1 с периодом 40 минут. Поскольку 40 + 40/13 минут меньше часа, то за час получится ровно 13 точек встречи.

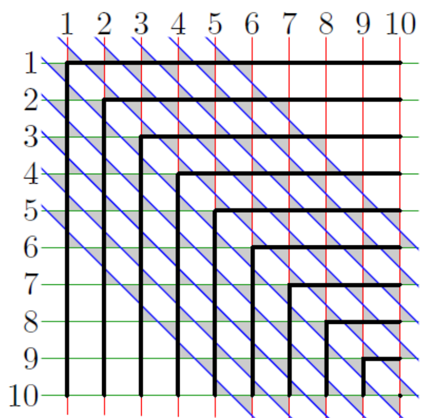
***Критерии проверки***:

- 7 баллов – рассмотрены и обоснованы оба случая движения бегунов.
- 5 баллов – рассмотрен и обоснован только один случай движения бегунов.

**Задача 2.** Проведено три семейства параллельных прямых, по 10 прямых в каждом. Какое наибольшее число треугольников они могут вырезать из плоскости?

***Ответ:*** 150 треугольников

***Решение.***




Рассмотрим 100 узлов — точек пересечения прямых первого и второго направлений. Разобьем их на 10 уголков: первый уголок – узлы, лежащие на первых прямых первого и второго

направления. Второй – лежащие на вторых прямых (кроме точек, лежащих в первом уголке) и т. д. Треугольники со сторонами, параллельными трем фиксированным направлениям, могут иметь две ориентации, причем каждый из наших 100 узлов может быть вершиной не более одного треугольника каждой ориентации. Поэтому 10 прямых третьего направления образуют не более 2·25 треугольников с последними пятью уголками, так как эти пять уголков содержат всего 25 узлов.

Заметим далее, что каждая из прямых третьего направления образует не более одного треугольника каждой ориентации с узлами, принадлежащими одному уголку. Поэтому треугольников, имеющих вершины в узлах остальных пяти уголков, будет не больше 10·2·5.

Итого треугольников не более 100 + 50 = 150. Пример со 150 треугольниками приведен на рисунке.

**Задача 3.** Даны целые числа $a$, $b$ и $c$, $c \neq b$. Известно, что квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ и $(c - b)\, x^2 + (c - a)\, x + (a + b)$ имеют общий корень (не обязательно целый). Докажите, что $a + b + 2c$ делится на 3.

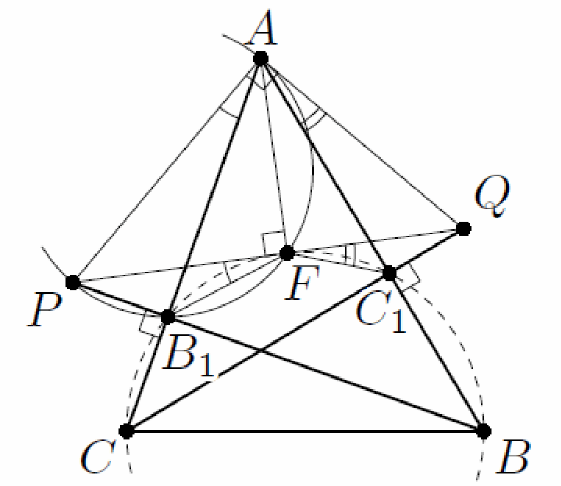
***Решение.***

Вычтем из первого трехчлена второй. Получим, что они оба имеют общий корень с трехчленом
$ax^2 + bx + c - ((c - b)\, x^2 + (c - a)\, x + (a + b)) = (a + b - c)\,(x^2 + x - 1)$. Следовательно, либо $a + b - c = 0$, либо их общий корень совпадает с одним из корней трехчлена $x^2 + x - 1$.

В первом случае имеем $a + b + 2c = 3c \vdots 3$. Во втором случае получаем, что если $x_0$ – общий корень трехчленов $ax^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + x - 1 = 0$, то $ax_0^2 + bx_0 + c + c\left(x_0^2 + x_0 - 1\right) = 0$, откуда $((a+c)x_0 + (b + c))\, x_0 = 0$. Число $x_0$ – иррационально, поэтому полученное равенство возможно только если $a + c = 0$ и $b + c = 0$. Получаем, что $a = b = - c$ и, следовательно, $a + b + 2c = 0$.

**Задача 4.** Дан остроугольный треугольники $ABC$. На продолжениях $BB_1$ и $CC_1$ его высот за точки $B_1$ и $C_1$ выбраны соответственно точки $P$ и $Q$ так, что угол $PAQ$ – прямой. Пусть $AF$– высота треугольника $APQ$. Докажите, что угол $BFC$– прямой.

***Решение***




Точки $B_1$ и $C_1$ лежат на окружности, построенной на $BC$ как на диаметре (см. рис.). Для решения достаточно доказать, что $F$ также лежит на этой окружности.
Точки $B_1$ и $F$ лежат на окружности с диаметром AP. Поэтому $\angle PFB_1 = \angle PAB_1$. Аналогично $\angle QFC_1 = \angle QAC_1$. Имеем $180° - \angle B_1FC_1 = \angle PFB_1 + \angle QFC_1 = \angle PAB_1 + \angle QAC_1 = \angle PAQ - \angle A = 90° - \angle A = \angle B_1CC_1$. Таким образом, четырёхугольник $CB_1FC_1$– вписанный.

**Задача 5.** При изготовлении партии из $N \geq 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?

***Ответ:*** Может.

***Решение***

Пусть $m_1$ и $m_2$ – фальшивые монеты, $m_3$, $m_4$ и $m_5$ – какие-то три из настоящих монет. Работник делает два таких взвешивания: $m_1 \vee m_3$, $m_4 + m_5 \vee m_2 + m_3$.

В результате начальник убеждается, что $m_1$ легче $m_3$ и что среди монет $m_4$ и $m_5$ тяжелых монет больше, чем среди $m_2$ и $m_3$. Таким образом, он делает вывод, что $m_3$, $m_4$ и $m_5$ – тяжелые монеты, а

$m_1$ и $m_2$– легкие. Поскольку он знает, что фальшивых монет ровно две, то понимает, что фальшивыми являются именно легкие монеты $m_1$ и $m_2$.