10 класс

1. Число 2017 умножили последовательно на 1, 2, 3, …, 99. У получившихся произведений выписали две последние цифры. Докажите, что эти 99 двузначных чисел различны.

<u>Решение</u>: Допустим, что два произведения $2017a$ и $2017b$ заканчиваются двумя одинаковыми цифрами, тогда их разность заканчивается двумя нулями. То есть число $2017a - 2017b = 2017(a-b)$делится на 100.

Число 2017 является простым, значит $(a-b)$ делится на 100. Так как a и b – двузначные числа, то их разность делится на 100 только если они равны, но эти числа разные, значит произведения не могут заканчиваться одинаковыми двумя одинаковыми цифрами.

2. Решите уравнение: $x^2+4\sqrt{3}x+2x+6+8\sqrt{3}=0$.

<u>Решение</u>: $x^2+\left(4\sqrt{3}+2\right)x+6+8\sqrt{3}=0$,

$$D_{/4}=\left(2\sqrt{3}+1\right)^2-\left(6+8\sqrt{3}\right)=12+4\sqrt{3}+1-6-8\sqrt{3}=7-4\sqrt{3}=4-2\cdot2\cdot\sqrt{3}+3=$$

$$=\left(2-\sqrt{3}\right)^2,\ x=-2\sqrt{3}-1\pm\left(2-\sqrt{3}\right),\ x_1=1-3\sqrt{3},\ x_2=-3-\sqrt{3}.$$

<u>Ответ</u>: $x_1=1-3\sqrt{3},\ x_2=-3-\sqrt{3}$.

<u>Рекомендации</u>: если правильно вычислен дискриминант, но не извлечён корень из иррационального выражения, то есть получен ответ в форме $x=-2\sqrt{3}-1\pm\sqrt{7-4\sqrt{3}}$, то 3-4 балла.

3. Теоретически, имеющиеся в совхозе комбайны, работая вместе, могут убрать урожай за одни сутки. Однако по плану комбайны вступают в работу последовательно: в первый час работает лишь один комбайн, во второй – два, в третий – три и т.д. до тех пор, пока все комбайны не начинают работать вместе. Затем комбайны работают все вместе до полной уборки урожая. В результате время работы по плану в 1,5 раза больше теоретического. Сколько комбайнов в совхозе?

<u>Решение</u>: Пусть в совхозе n комбайнов. Тогда производительность каждого равна $\frac{1}{24n}$ часть урожая в час.

По плану в первый час работает 1 комбайн и убирает $\frac{1}{24n}$ часть урожая, во второй час работают 2 комбайна и за второй час они убирают $\frac{2}{24n}$ часть урожая, в третий час 3 комбайна убирают $\frac{3}{24n}$ часть урожая и т.д., пока в работу не вступит n-ый комбайн и в n-ый час они убирают $\frac{n}{24n}=\frac{1}{24}$ часть урожая.

Затем все n комбайнов работают с общей производительностью $\frac{1}{24}$ в течении k часов и убирают $\frac{k}{24}$ часть урожая. В итоге будет убран весь урожай, то есть $\frac{1}{24n}+\frac{2}{24n}+\frac{3}{24n}+...+\frac{n}{24n}+\frac{k}{24}=1$.

Так как при работе по плану продолжительность работы в 1,5 раза больше теоретических 24 часов, то есть составляет 36 часов, то $n+k=36$.

$$\frac{1}{24n}+\frac{2}{24n}+\frac{3}{24n}+...+\frac{n}{24n}+\frac{36-n}{24}=1$$

$$\frac{1+2+3+...+n}{24n}+\frac{36-n}{24}=1$$

$$\frac{(n+1)n}{48n}+\frac{36-n}{24}=1$$

$$\frac{n+1+72-2n}{48}=1$$

$$73-n=48$$

$$n=25$$

Итак, в совхозе 25 комбайнов.

Ответ: 25.

4. При каких значениях параметра *a* уравнение $x^2-\frac{5a}{2\cos x-3}+10=0$ имеет единственное решение?

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-\frac{5a}{2\cos x-3}+10$.

$f(-x)=(-x)^2-\frac{5a}{2\cos(-x)-3}+10=x^2-\frac{5a}{2\cos x-3}+10=f(x)$, значит $f(x)$ – чётная функция. Нули чётной функции симметричны относительно нуля. Значит, чтобы уравнение имело 1 корень, это должен быть $x = 0$, при подстановке 0 в уравнение, должно получаться верное числовое равенство:

$$0^2-\frac{5a}{2\cos 0-3}+10=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5a+10=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=-2.$$

При этом значении параметра a уравнение имеет корень $x = 0$. Чтобы он был единственным, необходимо убедиться, что других корней нет.

Решим уравнение при $a=-2$: $x^2+\dfrac{10}{2\cos x-3}+10=0$

$$x^2+10=-\frac{10}{2\cos x-3} \quad (*)$$

Так как $-1\le\cos x\le 1$, то $-5\le 2\cos x-3\le -1 \;\Rightarrow\; -1\le\dfrac{1}{2\cos x-3}\le-\dfrac{1}{5} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; 2\le-\dfrac{10}{2\cos x-3}\le 10$.

Так как $x^2\ge 0$, то $x^2+10\ge 10$. Значит, равенство (*) может выполняться только в одном случае, когда обе его части равны 10:

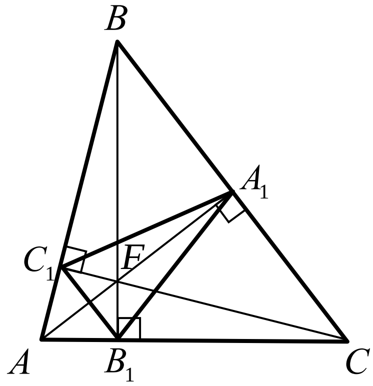
$$\begin{cases} x^2+10=10 \\ -\dfrac{10}{2\cos x-3}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \cos x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Итак, при $a=-2$, уравнение действительно имеет единственное решение.

Ответ: $a=-2$.

Рекомендации: если значение $a=-2$ найдено, но не проверено, что при этом значении уравнение действительно имеет единственное решение, то 3 балла.

5. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что эти высоты являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.



Решение: Так как треугольник остроугольный, то высоты находятся внутри треугольника *ABC* и пересекаются в точке *F*.

Так как BB_1 и CC_1 – высоты, то $\angle AC_1F+\angle FB_1A=$ $=90°+90°=180°$ $\Rightarrow$ вокруг четырёхугольника AC_1FB_1 можно описать окружность. В этой окружности вписанные углы $\angle C_1AF$ и $\angle C_1B_1F$ опираются на одну дугу, а значит $\angle C_1AF=\angle C_1B_1F$.

Также можно рассмотреть четырёхугольники CA_1FB_1 и BA_1FC_1, вокруг которых можно описать окружности, а значит $\angle A_1CF=\angle A_1B_1F$, $\angle B_1CF=\angle B_1A_1F$, $\angle C_1BF=\angle C_1A_1F$.

Прямоугольные треугольники BAA_1 и BCC_1 подобны по общему острому углу *B*, значит $\angle BAA_1=\angle BCC_1$. Аналогично, рассматривая подобные треугольники BAB_1 и CAC_1, получим $\angle ABB_1=\angle ACC_1$.

Используя эти равенства, можно получить $\angle C_1B_1F=\angle C_1AF=\angle BAA_1=$ $=\angle BCC_1=\angle A_1CF=\angle A_1B_1F$ $\Rightarrow B_1F$ – биссектриса $\angle A_1B_1C_1$.

$\angle B_1A_1F = \angle B_1CF = \angle ACC_1 = \angle ABB_1 = \angle C_1BF = \angle C_1A_1F \quad \Rightarrow A_1F$ – биссектриса $\angle B_1A_1C_1$. F – точка пересечения биссектрис, значит C_1F – биссектриса $\angle A_1C_1B_1$.

Итак, AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$. Что и требовалось доказать.

Рекомендации: если рассмотрен особый случай треугольника (равнобедренный, правильный), то 2 балла.