ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2017-2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

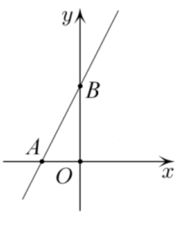
1. Может ли сумма 2017 последовательных натуральных чисел быть 2017-й степенью натурального числа?

Ответ. Да.

Решение. Сумма 2017 последовательных натуральных чисел равна $n+(n+1)+\dots+(n+2016)=2017n+\frac{2016\cdot 2017}{2}=2017\cdot(n+1008)$. Если $n+1008=2017^{2016}$, то сумма равна 2017-й степени числа 2017, и условие выполнено (при $n=2017^{2016}-1008$).

Комментарий. *При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 1-2 балла. За непринципиальные вычислительные ошибки снимать по баллу за ошибку. Если при верном подходе ошибка в вычислении не позволила получить положительный ответ – 3 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

2. График линейной функции $y=kx+k+1$ $(k>0)$ пересекает ось Ox в точке A, ось Oy – в точке B (см. рисунок). Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника ABO.



Ответ. 2.

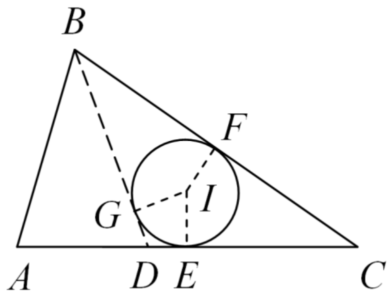
Решение. Абсцисса точки A пересечения с осью Ox: $0=kx+k+1$; $x=-\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Ордината точки B пересечения с осью Oy: $y=k\cdot 0+k+1$; $y=k+1$. Следовательно, $S_{ABO}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\left(2+k+\frac{1}{k}\right)$. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $k+\frac{1}{k}\geq 2$, причем равенство достигается при $k=1$, поэтому и наименьшее значение S_{ABO} достигается при $k=1$. Таким образом, наименьшая возможная площадь треугольника ABO равна 2.

Комментарий. *Верный ответ найден на основании рассмотрения примера, и не доказана его минимальность – 1 балл. Найдено выражение площади треугольника через* k *– 5 баллов. При верной логике рассуждений в преобразованиях допущены ошибки, не позволившие получить верный ответ – 4 балла. Утверждение о том, что наименьшее значение выражения* $k+\frac{1}{k}$ *достигается при* $k=1$ *можно использовать без доказательства.*

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Известно, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник BCD. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ. $\angle C = 36°, \angle A = \angle B = 72°$.

Решение. Обозначим общий центр кругов через I, а точки соприкосновения вписанного в треугольник BCD круга со сторонами CD, BC и BD через E, F, G соответственно (см. рис.). Отрезки IE и IF – серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC соответственно, а потому $AE = CE, BF = CF$. Из свойств касательных к окружности $BG = BF, DG = DE, CE = CF$, поэтому $BD = BG + GD = BF + GD = FC + DE = EC + DE = CD$. Кроме этого, $BC = 2CF = 2CE = AC$. Таким образом, треугольники BDC и ACB равнобедренные. Обозначим $\angle BCA = \alpha$, тогда $\angle CBD = \angle ABD = \alpha, \angle CBA = 2\alpha, \angle CAB = \angle CBA = 2\alpha$. Таким образом, треугольник ABC имеет углы $\alpha, 2\alpha, 2\alpha$, откуда находим α: $5\alpha = 180°, \alpha = 36°$.



Комментарий. *Установлено, что треугольники BDC и ACB равнобедренные – 6 баллов. При отсутствии решения за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1–3 балла.*

4. Найдите все натуральные n, для которых верны оба утверждения:
1) наибольший простой делитель числа n равен $\sqrt{n}$,
2) наибольший простой делитель числа $(n+72)$ равен $\sqrt{n+72}$.

Ответ. 49 и 289.

Решение. Обозначим упомянутые простые делители p_1 и p_2. Тогда $n = p_1^2$, $n + 72 = p_2^2$, откуда $(p_2 + p_1)(p_2 - p_1) = 72$. Рассмотрим разложения числа 72 на натуральные множители: $72 = m \cdot k$ $(m > k)$. Тогда $p_1 = \frac{m-k}{2}$, $p_2 = \frac{m+k}{2}$.

1) $m = 72$, $k = 1$: p_1 не целое, противоречие.
2) $m = 36$, $k = 2$: $p_1 = 17$, $p_2 = 19$.
3) $m = 24$, $k = 3$: p_1 не целое, противоречие.
4) $m = 18$, $k = 4$: $p_1 = 7$, $p_2 = 11$.
5) $m = 12$, $k = 6$: $p_1 = 3$, $p_2 = 9$, p_2 не является простым, противоречие.
6) $m = 9$, $k = 8$: p_1 не целое, противоречие.

Подходят пары $p_1 = 17, p_2 = 19$ и $p_1 = 7, p_2 = 11$. Поскольку $n = p_1^2$, то искомые числа 49 и 289.

Комментарий. *Полный ответ найден подбором, и не доказано, что нет других подходящих натуральных чисел – 3 балла. Подбором найден только один ответ – 1 балл. При правильных рассуждениях упущены некоторые случаи – до 5 баллов.*

5. На доске написано число 24. Лёша и Витя ходят по очереди, изменяя число: либо дописав одну цифру в конец, либо стерев последнюю цифру предыдущего числа, либо переставив любым образом цифры предыдущего числа (число не может начинаться с нуля). Оставлять число без изменения нельзя, но можно повторять то, что было раньше. Первым ходом Лёша должен получить число кратное 2, затем Витя – кратное 3, Лёша – кратное 4 и т.д. Кто не сможет сделать ход – проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: выиграет Лёша.

Решение. Выиграет Лёша. Второе число он получает, дописав в конце 0. Теперь на доске записано 240. Далее, если Витя своим ходом превратил число 240 в число B, Лёша снова превращает B в 240. Это не противоречит правилам, поскольку число 240 делится на 4, 6, 8, 10, 12. Для получения 13-го числа Витя вынужден дописать в конец 5 (так как 204, 402 и 420 не делятся на 13), после чего Лёша переставляет цифры и получает 2450 (оно, очевидно, делится на 14). Витя должен добиться делимости на 15, но это невозможно: сумма цифр числа 2450 не делится на 3, поэтому перестановка не поможет. Стирание последней цифры и дописывание нуля не меняют сумму цифр. Дописывание 5 также приводит к числу, не делящемуся на 3. Дописывание другой цифры в конец приводит к числу, не делящемуся на 5.

Комментарий. *Ответ без обоснования – 0 баллов. Верный ответ, полученный с помощью примеров (не указана оптимальная стратегия) – 1 балл. Оптимальная стратегия Лёши указана, но не обоснована – до 4 баллов. При отсутствии доказательства за потенциально полезные идеи 1–2 балла.*